Análise Matemática III
1º semestre de 2005/2006

Exercício teste 9 (a entregar na aula prática da semana de 21/11/2005)

Considere o conjunto

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 = z^2+1 \ ; \ x^2+y^2=5\right\}.$$

(a) Mostre que M é uma variedade. Qual a sua dimensão?

Resolução de (a): M é o conjunto de nível zero da função $F : \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 (de facto C^∞) definida por

$$F(x,y,z) \quad = \quad (x^2+y^2-z^2-1,\, x^2+y^2-5).$$

Temos então de mostrar que $\mathrm{car}(DF)(x,y,z) = 2$ para todos os pontos de M. Como

$$DF = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

vemos que $\mathrm{car}(DF)(x,y,z) < 2$ se $z = 0$ para quaisquer x e y, ou se $(x,y) = (0,0)$ para qualquer z. É fácil de verificar que nenhum destes pontos pertence a M. Substituindo, por exemplo, $z = 0$ em $F = 0$ obtemos o sistema impossível

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 1 \\ x^2+y^2 &= 5. \end{aligned}$$

Concluímos que $\mathrm{car}(DF)(x,y,z) = 2$ em todos os pontos de M e portanto $M = F^{-1}(\{0\})$ é uma variedade de dimensão $\dim(M) = 3-2 = 1$.

(b) A variedade M é uma união de duas circunferências que não se intersectam. Determine essas circunferências.

Resolução de (b): A variedade M de dimensão 1 coincide com a intersecção da superfície do hiperboloide

$$S_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 = z^2+1\} \tag{1a}$$

com o cilindro

$$S_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 = 5\} \tag{1b}$$

(isto é, $M = S_1 \cap S_2$). Substituindo $x^2+y^2 = 5$ em $(1a)$, temos $z^2 = 4$ pelo que a intersecção é composta por duas circunferências paralelas ao plano Oxy com centro no eixo Oz:

$$C_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = -2, \quad x^2+y^2 = 5\right\}$$

e

$$C_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 2, \quad x^2 + y^2 = 5\right\}.$$

(c) Encontre uma parametrização em torno do ponto $(\sqrt{10}/2, \sqrt{10}/2, 2) \in M$.

Resolução de (c): O ponto $P = (\sqrt{10}/2, \sqrt{10}/2, 2) \in C_2 \subset M$. Uma representação paramétrica de todos os pontos de C_1 excepto o ponto $(\sqrt{5}, 0, 2)$ é a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{ccc}]0, 2\pi[& \xrightarrow{g} & C_2 \setminus \{(\sqrt{5}, 0, -2)\} \\ g & : & \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \sqrt{5}\cos(\theta) \\ y & = & \sqrt{5}\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z & = & 2. \end{array} \right. \end{array} \tag{2}$$

(d) Determine o espaço tangente $T_{(\sqrt{10}/2, \sqrt{10}/2, 2)}M$ e o espaço normal $\left(T_{(\sqrt{10}/2, \sqrt{10}/2, 2)}M\right)^\perp$ à variedade M no ponto $(\sqrt{10}/2, \sqrt{10}/2, 2)$.

Resolução de (d): O espaço tangente, $T_{(\sqrt{10}/2, \sqrt{10}/2, 2)}M = T_{(\sqrt{10}/2, \sqrt{10}/2, 2)}C_2$, é gerado pela derivada de g (ver (2)), no ponto $\theta_0 = \frac{\pi}{4} = g^{-1}(\sqrt{10}/2, \sqrt{10}/2, 2)$:

$$Dg(\frac{\pi}{4}) = \left(\begin{array}{c} -\sqrt{5}\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \sqrt{5}\cos(\theta) \\ 0 \end{array}\right)_{|\theta = \frac{\pi}{4}} = \left(\begin{array}{c} -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ \frac{\sqrt{10}}{2} \\ 0 \end{array}\right).$$

Logo

$$T_{(\sqrt{10}/2, \sqrt{10}/2, 2)}M = \mathcal{L}\left\{(-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}, 0)\right\} = \mathcal{L}\left\{(-1, 1, 0)\right\}.$$

Para o espaço normal $\left(T_{(\sqrt{10}/2, \sqrt{10}/2, 2)}M\right)^\perp$ obtemos

$$\begin{array}{rcl} \left(T_{(\sqrt{10}/2, \sqrt{10}/2, 2)}M\right)^\perp & = & \left\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (-1, 1, 0) = 0\right\} = \\ & = & \left\{(\alpha, \beta, \gamma) : , \ \beta = \alpha, \ \gamma \in \mathbb{R}\right\} = \mathcal{L}\left\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\right\}. \end{array}$$