Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

LEC, LET, LEEC, LEGI, LEM, LEIC

RESOLUÇÃO EXAME 1 / TESTE 2 – 15 DE JANEIRO DE 2003 – 17H

(1) Considere o sólido

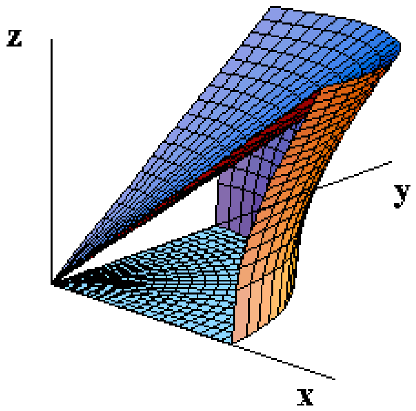
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, 2z^2 < x^2 + y^2 < z^2 + 1\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} dx\right) dy\right) dz$.

(2 val.) (b) Calcule a massa do sólido V sabendo que a densidade de massa é dada por $f(x, y, z) = z$.

Resolução:

(a) Utilizando coordenadas cilíndricas vemos que o sólido se encontra limitado pelo cone de equação $\rho = \sqrt{2}z$, pelo hiperbolóide de equação $\rho^2 = z^2 + 1$, e pelos planos coordenados. O cone e o hiperbolóide intersectam-se em $z = 1$:



Consequentemente, os cortes horizontais do sólido, a z constante, vão ser quartos de coroas circulares de raio interior $\sqrt{2}z$ e de raio exterior $\sqrt{z^2+1}$. Temos então que a expressão para o volume do sólido será

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{2}z} \left(\int_{\sqrt{2z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2+1-y^2}} dx \right) dy + \int_{\sqrt{2}z}^{\sqrt{z^2+1}} \left(\int_0^{\sqrt{z^2+1-y^2}} dx \right) dy \right) dz.$$

(b) Se utilizarmos coordenadas cilíndricas obtemos:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{2}z}^{\sqrt{z^2+1}} \rho z \, d\rho \right) dz \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 z(1 - z^2) dz = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

(2 val.) (2) Calcule o integral

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} e^{-x^2-y^2}\ dy\, dx,$$

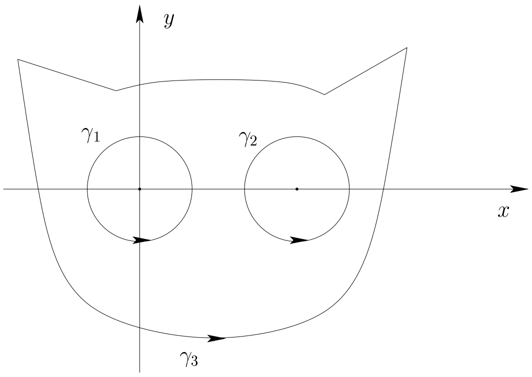
utilizando uma mudança de coordenadas apropriada.

Resolução:

Se observarmos que a região de integração é o disco de raio 1 e centro na origem, é natural utilizarmos coordenadas polares. Obtemos:

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r e^{-r^2}\ dr \right) d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=1} = \pi(1 - \frac{1}{e}).$$

(3) Sejam γ_1 e γ_2 duas circunferências de raio 1 centradas em $(0,0)$ e $(3,0)$, e γ_3 uma curva simples fechada como na seguinte figura:



Seja ainda $F(x,y) = \left(-\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}\right)$ um campo vectorial em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Calcule os integrais de caminho:

(1,5 val.) (a)$\oint_{\gamma_1} F \cdot dg_1$; (1,5 val.) (b)$\oint_{\gamma_2} F \cdot dg_2$; (1 val.) (c) $\oint_{\gamma_3} F \cdot dg_3$.

Resolução:

(a) Seja $g_1(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ uma parametrização de γ_1. Então, $g_1'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ e utilizando a definição de trabalho ou de integral de linha de um campo vectorial:

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_1} F \cdot dg_1 &= \int_0^{2\pi} F(g_1(\theta)) \cdot g_1'(\theta)\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta, \cos^3\theta) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\ d\theta = \pi.\end{aligned}$$

(b) Podemos verificar que o campo F é de classe C^1 e fechado em $\mathbb{R}^2 - 0$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{-x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}.$$

Uma vez que F é fechado de classe C^1 sobre γ_2 e no seu interior, concluímos que $\oint_{\gamma_2} F \cdot dg_2 = 0$, pelo Teorema de Green. Podíamos, em alternativa, invocar que γ_2 é uma curva fechada homotópica a 1 ponto em $\mathbb{R}^2 - 0$.

(c) Sabendo que F é de classe C^1 e fechado em $\mathbb{R}^2 - 0$, e ainda que as curvas γ_3 e γ_1 são homotópicas, obtemos por (a):

$$\oint_{\gamma_3} F \cdot dg_3 = \oint_{\gamma_1} F \cdot dg_1 = \pi.$$

INÍCIO DO 2º TESTE

(4) Considere o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 + xy\}.$$

(1 val.) (a) Mostre que S é uma superfície (variedade de dimensão 2);

(2 val.) (b) Determine a distância de S à origem.

Resolução:

(a) S é descrita pelos zeros da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = 1 + xy - z$, que é de classe C^1. Como, $\nabla f(x, y, z) = (y, x, -1)$ nunca se anula, concluímos que S é uma variedade de dimensão $3 - 1 = 2$.

(b) Para calcular a distância de S à origem, vamos determinar o(s) ponto(s) de S que se encontra(m) mais próximo(s) da origem, ou seja o(s) ponto(s) $(x, y, z) \in S$ que minimizam $d^2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, o quadrado da distância do ponto (x, y, z) à origem.

Trata-se pois de um problema de extremos condicionados, cuja solução pode ser obtida recorrendo ao método dos multiplicadores de Lagrange: Consideramos a função

$$g(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(1 + xy - z)$$

e determinamos os seus pontos estacionários:

$$\nabla g(x, y, z, \lambda) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 2x - \lambda y = 0, \\ 2y - \lambda x = 0, \\ 2z + \lambda = 0, \\ 1 + xy = z. \end{cases}$$

As primeiras três equações podem ser escritas como um sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 0, \\ -\lambda & 2 & 0, \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda \end{bmatrix}$$

Este sistema linear tem sempre a solução $x = 0$, $y = 0$, $z = -\lambda/2$. A quarta equação diz-nos que para esta solução $z = 1$. Se o determinante da matriz do sistema, que é $2(4 - \lambda^2)$ for não nulo, esta é a única solução. Se for nulo então $\lambda = \pm 2$ e obtemos:

- $\lambda = 2$: $x = y$ e $z = -1$. A quarta equação fornece $1 + x^2 = -1$ que não tem soluções;
- $\lambda = -2$: $x = -y$ e $z = 1$. A quarta equação fornece $1 - x^2 = 1$, ou seja $x = 0$;

Em qualquer caso, $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ e $\lambda = -2$ é a única solução do sistema.

Por outro lado, a função distância é limitada inferiormente pelo que a solução encontrada, i.e., o ponto $(0, 0, 1)$, é um mínimo. (Note-se que S é ilimitada e que a função distância à origem não é limitada superiormente em S.) Concluímos que a distância de S à origem é $d(0, 0, 1) = 1$.

(5) Considere a variedade

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, \;\; y > 0, \;\; z > 0\},$$

e o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$F(x, y, z) = (2x, -y, 1 - z).$$

Calcule o fluxo $\int_S F \cdot \nu$ segundo a direcção da normal unitária ν cuja terceira componente é positiva, usando:

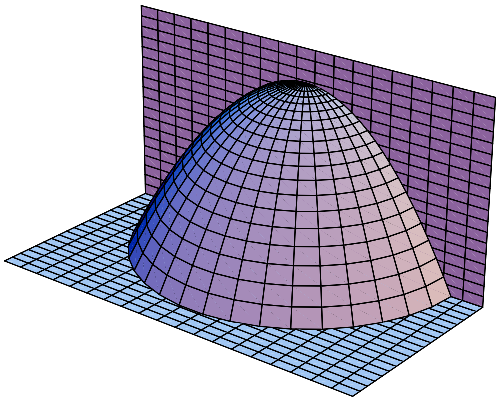
(1,5 val.) (a) a definição de fluxo;

(2 val.) (b) o Teorema da Divergência;

(2 val.) (c) o Teorema de Stokes.

Resolução:

(a) S constitui metade de um parabolóide invertido, limitado pelos planos $y = 0$ e $z = 0$:



Consideremos uma parametrização de S definida por:

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, 1 - \rho^2), \qquad \rho \in]0, 1[, \quad \theta \in]0, \pi[.$$

A sua matriz Jacobiana é dada por

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho \cos\theta \\ -2\rho & 0 \end{bmatrix}.$$

Vemos que

$$\begin{aligned} D_\rho g \times D_\theta g &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -2\rho) \times (-\rho \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\theta, 0) \\ &= (2\rho^2 \cos\theta, 2\rho^2 \operatorname{sen}\theta, \rho), \end{aligned}$$

tem o sentido da normal pretendida, com a terceira componente positiva. Ainda,

$$\begin{aligned} F(g(\rho, \theta)) \cdot (D_\rho g \times D_\theta g) &= 4\rho^3 \cos^2\theta - 2\rho^3 \operatorname{sen}^2\theta + \rho^3 \\ &= 6\rho^3 \cos^2\theta - \rho^3. \end{aligned}$$

Obtemos pois que o fluxo é dado por:

$$\int_0^\pi \int_0^1 F(g(\rho, \theta)) \cdot (D_\rho g \times D_\theta g) d\rho d\theta = \int_0^\pi \int_0^1 (6\rho^3 \cos^2\theta - \rho^3) d\rho d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Temos que $\operatorname{div} F = 2 - 1 - 1 = 0$. Seja A o semi-disco no plano $z = 0$, de raio 1 e centrado na origem. Seja B a região do plano $y = 0$ limitada pela parábola $z = 1 - x^2$ e pelo eixo dos x. Sejam ν_A, ν_B as normais unitárias a A e B exteriores ao volume V limitado por A, B e S. Pelo Teorema da Divergência temos,

$$0 = \iiint_V \operatorname{div} F = \iint_S F \cdot \nu + \iint_A F \cdot \nu_A + \iint_B F \cdot \nu_B.$$

Como:

- $\nu_A = (0, 0, -1)$ e $F \cdot \nu_A = z - 1 = -1$ em A. Logo:

$$\iint_A F \cdot \nu_A = -(\text{área A}) = -\frac{\pi}{2};$$

- $\nu_B = (0, -1, 0)$ e $F \cdot \nu_B = y = 0$ em B. Logo:

$$\iint_B F \cdot \nu_B = 0;$$

Assim, obtemos outra vez:

$$\iint_S F \cdot \nu = -\iint_A F \cdot \nu_A - \iint_B F \cdot \nu_B = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Sabemos que $\operatorname{div} F = 0$ e o domínio de F é $\mathbb{R}^3$ logo existe um potencial vector H tal que $\operatorname{rot} H = F$. Para o determinar reolvemos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z} = F_1 = 2x \\ \frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial x} = F_2 = -y \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} = F_3 = 1 - z. \end{cases}$$

Escolhendo $H_3 = 0$, obtemos das duas primeiras equações $H_1 = -yz + \alpha(x, y)$, $H_2 = -2xz + \beta(x, y)$. A terceira equação fica então $-2z + \frac{\partial \beta}{\partial x} + z - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 1 - z$ e pode ser resolvida tomando por exemplo $\alpha = 0$, $\beta = x$. O potencial vector vai então ser $H(x, y, z) = (-yz, -2xz + x, 0)$.

Seja C a semi-circunferência horizontal no plano $z = 0$ de raio 1, centrada na origem, com $y > 0$ parametrizada por $g(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, $\theta \in [0, \pi]$. Seja $\tilde{C}$ o arco de parábola parametrizado por $\tilde{g}(x) = (x, 0, 1 - x^2)$, com $x \in [-1, 1]$. Pelo Teorema de Stokes,

$$\iint_S F \cdot \nu = \int_S \operatorname{rot} H \cdot \nu = \oint_C H + \oint_{\tilde{C}} H.$$

O primeiro integral é dado por

$$\oint_C H = \int_0^\pi (0, \cos\theta, 0) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0) d\theta = \int_0^\pi \cos^2\theta d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

O segundo integral é zero pois $H \cdot \tilde{g}'(x) = (0, -2xz + x, 0) \cdot (1, 0, -2x) = 0$ sobre a curva $\tilde{C}$.

Obtemos assim, mais uma vez,

$$\iint_S F \cdot \nu = \frac{\pi}{2}.$$

(1,5 val.) (6) Mostre que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x, y \in \mathbb{Q} \\ \frac{|y|\, x^2}{(x^2+y^2)^2(1+x^2+y^2)} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é integrável em $\mathbb{R}^2$ e calcule o seu integral.

Resolução:

Os racionais têm medida nula. Consequentemente, f é igual quase em toda a parte à função

$$g(x,y) = \frac{|y|x^2}{(x^2+y^2)^2(1+x^2+y^2)},$$

e será integrável se e só se g o for.

Seja $k = 1, 2, \ldots$ e seja

$$g_k(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & \text{se } 1/k^2 \le x^2+y^2 \le k^2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A sucessão $\{g_k\}$ é monótona crescente porque g é positiva. As funções g_k são integráveis em $\mathbb{R}^2$ porque são contínuas nas coroas circulares compactas de raio interior $1/k$ e de raio exterior k, e $g_k = 0$ zero fora delas. Temos,

$$\int_{\mathbb{R}^2} g_k = \int_0^{2\pi} \int_{1/k}^{k} r \frac{r^3 \cos^2\theta |\operatorname{sen}\theta|}{r^4(1+r^2)} dr d\theta$$
$$= (4/3)\arctan(k) - \arctan(1/k)) \to \frac{2\pi}{3}, \qquad \text{quando } k \to +\infty.$$

Portanto, observando que para todo o (x,y) se tem $\lim_{k\to\infty} g_k(x,y) = g(x,y)$, o Teorema da Convergência Monótona de Levi garante que g, e consequentemente f é integrável em $\mathbb{R}^2$. Além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}^2} g = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} g_k = \frac{2\pi}{3}.$$