Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

Cursos LEAM, LEB, LEEC, LEGM, LEIC, LEM, LEMat, LEQ, LQ

2º Teste - 18 de Dezembro de 2004

Resolução

1. Considere o conjunto

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 1 \, ; \, z = x^2 + (y-1)^2\} \; .$$

(2.5 val.) (a) Mostre que L é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

Resolução:
Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$F(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 - 1 \, , \, z - x^2 - (y-1)^2\right) .$$

Então L é o conjunto de nível $(0, 0)$ de F. A função F é de classe C^1 porque as suas componentes são polinómios. A matriz Jacobiana

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ -2x & -2(y-1) & 1 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a 2 em L. De facto, a segunda linha de $DF(x, y, z)$ não é múltipla da primeira e, por outro lado, as entradas da primeira linha não podem ser todas nulas porque $x^2 + y^2 = 1$ em L.
Assim, L é uma variedade de dimensão 1.

(3 val.) (b) Determine o espaço tangente e o espaço normal a L no ponto $(1, 0, 2)$.

Resolução:
O espaço normal a L no ponto $(1, 0, 2)$ é gerado pelas linhas de $DF(1, 0, 2)$, ou seja, pelos vectores $(2, 0, 0)$ e $(-2, 2, 1)$.
Sendo ortogonal ao correspondente espaço normal, o espaço tangente a L no ponto $(1, 0, 2)$ é o conjunto de vectores (u, v, w) descrito pelo sistema de equações

$$\begin{cases} 2u = 0 \\ -2u + 2v + w = 0, \end{cases}$$

ou seja, é o espaço gerado pelo vector $(0, 1, -2)$.

(3 val.) (c) Mostre que a função $f(x,y,z) = z + \frac{y^3}{3}$ tem um máximo e um mínimo absolutos em L e determine-os.

Resolução:

Da definição de L temos

$$x^2 + y^2 = 1\ ,\ z = 2 - 2y$$

e, portanto,

$$|x| \le 1\ ,\ |y| \le 1\ ,\ |z| \le 4.$$

Assim, L é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^3$ e, sendo contínua, concluimos que a função f tem um máximo e um mínimo absolutos em L.

Para os determinar recorremos ao método dos multiplicadores de Lagrange que consiste em resolver o sistema

$$\begin{cases} Dg(x,y,z) = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

em que g é a função definida por

$$g(x,y,z) = z + \frac{y^3}{3} + \alpha(x^2 + y^2 - 1) + \beta(z - x^2 - (y-1)^2).$$

Então temos

$$\begin{cases} 2\alpha x - 2\beta x = 0 \\ y^2 + 2\alpha y - 2\beta y + 2\beta = 0 \\ 1 + \beta = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z - x^2 - (y-1)^2 = 0. \end{cases}$$

Da terceira equação, $\beta = -1$ e, da primeira equação, obtemos

$$(\alpha + 1)x = 0 \ \Leftrightarrow\ \alpha = -1 \ \vee\ x = 0.$$

Se $\alpha = -1$ então, da segunda equação, $y^2 = 2$ e, da quarta equação, obtemos a condição impossível $x^2 = -1$.

Portanto, deveremos ter $x = 0$ e, da quarta e quinta equações, $y^2 = 1\ ;\ z = (y-1)^2$.

Assim, as soluções do sistema são os pontos $(0,-1,4)$ e $(0,1,0)$.

Tendo em conta que $f(0,-1,4) = \frac{11}{3}$ e que $f(0,1,0) = \frac{1}{3}$ concluimos que f tem o máximo absoluto em L no ponto $(0,-1,4)$ e tem o mínimo absoluto em L no ponto $(0,1,0)$.

2. Considere a variedade de dimensão 2

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2 \;\; ; \;\; z < 1\right\}$$

e o campo vectorial definido em $\mathbb{R}^3$ por

$$F(x,y,z) = (2x, 2y, -4z).$$

Calcule o fluxo de F através de M no sentido da normal com terceira componente positiva, usando:

(2.5 val.) (a) a definição de fluxo;

Resolução:
M é a superfície obtida rodando a parábola $z = (\rho-2)^2$ em torno do eixo Oz, com $z \in]0,1[$.
Consideremos a parametrização de M definida por:

$$g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\mathrm{sen}\theta, (\rho-2)^2), \qquad \rho \in]1,3[, \quad \theta \in]0,2\pi[.$$

A sua matriz Jacobiana é dada por

$$Dg(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \rho\cos\theta \\ 2(\rho-2) & 0 \end{bmatrix}.$$

Vemos que

$$\begin{aligned} D_\rho g \times D_\theta g &= (\cos\theta, \mathrm{sen}\theta, 2(\rho-2)) \times (-\rho\mathrm{sen}\theta, \rho\cos\theta, 0) \\ &= (-2\rho(\rho-2)\cos\theta, -2\rho(\rho-2)\mathrm{sen}\theta, \rho), \end{aligned}$$

tem o sentido da normal pretendida, com a terceira componente positiva. Assim,

$$\begin{aligned} & F(g(\rho,\theta)) \cdot (D_\rho g \times D_\theta g) \\ = \;& -4\rho^2(\rho-2)(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) - 4\rho(\rho-2)^2 \\ = \;& -8\rho(\rho-2)(\rho-1), \end{aligned}$$

pelo que o fluxo é dado por

$$\begin{aligned}
\int_M F \cdot \nu \, dS = &= \int_0^{2\pi} \int_1^3 F(g(\rho,\theta)) \cdot (D_\rho g \times D_\theta g) \, d\rho \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^3 -8\rho(\rho-2)(\rho-1) \, d\rho \, d\theta \\
&= -8 \int_0^{2\pi} \int_1^3 \rho^3 - 3\rho^2 + 2\rho \, d\theta \\
&= -16\pi \left[\frac{\rho^4}{4} - \rho^3 + \rho^2 \right]_1^3 = -32\pi.
\end{aligned}$$

(3 val.) (b) o teorema da divergência;

Resolução:

Temos $\text{div} F = 2 + 2 - 4 = 0$. Seja B a região do plano $z = 1$ entre as circunferências de raios 1 e 3 centradas na origem. Sejam n_B, n_M as normais unitárias a B e M, respectivamente, exteriores ao sólido D limitado por B e M. Pelo Teorema da Divergência temos,

$$0 = \iiint_D \text{div} F = \int_M F \cdot n_M + \int_B F \cdot n_B.$$

Como

$n_B = (0,0,1)$ e $F \cdot n_B = -4z = -4$ em B, temos

$$\int_B F \cdot n_B = -4(\text{área } B) = -4(9\pi - \pi) = -32\pi.$$

Assim, obtemos

$$\int_M F \cdot n_M = 0 - \int_B F \cdot n_B = 32\pi.$$

Note-se que este fluxo é segundo a normal exterior à fronteira de D e que o fluxo pedido é segundo a normal interior, pelo que o resultado deverá ser -32π, como o obtido na alínea (a).

(3 val.) (c) o teorema de Stokes.

Resolução:

Sabemos que $\mathrm{div} F = 0$ e que o domínio de F é $\mathbb{R}^3$, um conjunto em estrela. Consequentemente, existe um potencial vector A tal que $\mathrm{rot} A = F$. Para o determinar resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = F_1 = 2x \\ \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = F_2 = 2y \\ \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = F_3 = -4z. \end{cases}$$

Escolhendo $A_1 = 0$, obtemos da segunda e terceira equações $A_3 = -2xy + P(y,z)$, $A_2 = -4xz + Q(y,z)$. A primeira equação fica então $-2x + \frac{\partial P}{\partial y} + 4x - \frac{\partial Q}{\partial z} = 2x$ e pode ser resolvida tomando, por exemplo, $P = 0$ e $Q = 0$. O potencial vector é então $A(x,y,z) = (0, -4xz, -2xy)$. Usando o Teorema de Stokes temos

$$\int_M F \cdot \nu \, dS = \int_M \mathrm{rot} A \cdot \nu \, dS = \int_{\partial M} A \cdot d\gamma,$$

onde γ é uma parametrização da fronteira de M, percorrida no sentido compatível com a orientação de M dada pela normal ν. Temos $\partial M = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ onde

$$\Gamma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 = 9\, ; \, z = 1\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 = 1\, ; \, z = 1\},$$

e, usando a regra da mão direita, concluímos que Γ_1 deve ser percorrida no sentido anti-horário e Γ_2 no sentido horário, quando observadas, por exemplo, do ponto $(0,0,10)$. Assim, uma parametrização para Γ_1 é dada por

$$\gamma_1(t) = (3\cos t, 3\mathrm{sen} t, 1) \qquad 0 < t < 2\pi$$

e para Γ_2 é dada por

$$\gamma_2(t) = (\cos t, -\mathrm{sen} t, 1) \qquad 0 < t < 2\pi.$$

Finalmente obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_M F \cdot \nu \, dS &= \int_{\partial M} A \cdot d\gamma \\
&= \int_0^{2\pi} A(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\ dt + \int_0^{2\pi} A(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} (0, -12\cos t, -18\mathrm{sen} t \cos t) \cdot (-3\mathrm{sen} t, 3\cos t, 0)\ dt + \\
&\quad + \int_0^{2\pi} (0, -4\cos t, 2\mathrm{sen} t \cos t) \cdot (-\mathrm{sen} t, -\cos t, 0)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} -36\cos^2 t\ dt + \int_0^{2\pi} 4\cos^2 t\ dt = -36\pi + 4\pi = -32\pi.
\end{aligned}
$$

3. Considere a função

$$g(t) = \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{x}\,\mathrm{sen}(xt)dx. \tag{1}$$

(2 val.) (a) Mostre, justificando detalhadamente, que a equação

$$u + g(u+v) = 1, \tag{2}$$

define v como função de u, localmente em torno do ponto $(u,v) = (1,-1)$.

Resolução:

A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em (1) é de classe C^1 e a sua derivada satisfaz a regra de Leibniz, uma vez que a função integranda no segundo membro de (1),

$$
\begin{aligned}
f \ :\ [\pi, 2\pi] \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
f(x,t) &= \frac{\mathrm{sen}(xt)}{x},
\end{aligned}
$$

é contínua, a região de integração, $[\pi, 2\pi]$, é compacta e a derivada parcial em ordem a t,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \cos(xt),$$

é contínua. A função

$$
\begin{aligned}
F \ :\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
F(u,v) &= u + g(u+v),
\end{aligned}
$$

é então de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. O ponto $(u, v) = (1, -1)$ satisfaz (2),

$$1 + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{0}{x}\, dx = 1,$$

a derivada de F é dada pela expressão

$$DF(u, v) = \left(1 + g'(u + v),\ g'(u + v)\right).$$

e portanto

$$\frac{\partial F}{\partial v}(1, -1) = g'(0).$$

Para determinar $g'(0)$ aplicamos a regra de Leibniz

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(xt)}{x}\, dx = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\operatorname{sen}(xt)}{x}\right) dx = \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} \cos(xt)\, dx. \end{aligned}$$

Obtemos então

$$g'(0) = \int_{\pi}^{2\pi} 1\, dx = \pi,$$

e portanto

$$\frac{\partial F}{\partial v}(1, -1) = \pi \neq 0.$$

Do teorema da função implícita concluímos que a equação (2) define implícitamente v como função de classe C^1 de u numa vizinhança do ponto $(1, -1)$.

(1 val.) (b) Calcule a derivada $\dfrac{dv}{du}(1)$.

Resolução:

Do teorema da função implícita obtemos também

$$\frac{dv}{du}(1) = -(D_v F(1, -1))^{-1} D_u F(1, -1) = -\frac{1}{\pi}\,(1 + \pi) = -1 - \frac{1}{\pi}.$$