Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TODOS OS CURSOS EXCEPTO LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE 1 – 29 DE OUTUBRO DE 2005

apresente e justifique todos os cálculos

duração: hora e meia (9:00-10:30)

(1) Considere a seguinte região de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ -1 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 1 \ , \ 0 \le z \le 1 + x^2\} \ .$$

(3 val.) (a) Calcule o integral $\displaystyle\iiint_S (x+1)y$.

(3 val.) (b) Dada uma função f integrável em S, escreva uma expressão para $\displaystyle\iiint_S f$ da forma

$$\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} f \, dx \right) dy \right) dz \ .$$

Resolução:

(a) A região S é constituída pelos pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ com coordenadas (x,y) no rectângulo $[-1,1] \times [0,1]$ e com coordenada z entre o plano $z=0$ e a superfície $z = 1 + x^2$. Como esta superfície se obtém transladando o gráfico da parábola $z = 1 + x^2$ (no plano xOz) ao longo do eixo Oy, obtemos o seguinte esboço:

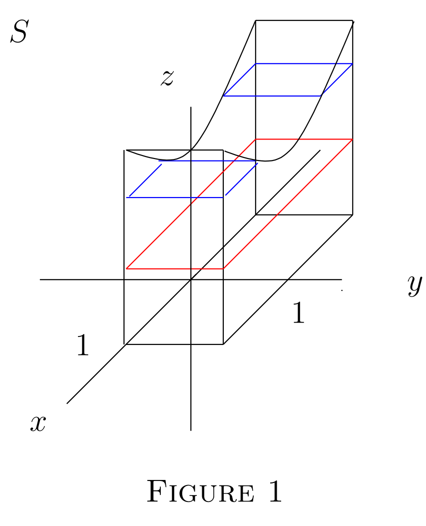

Figure 1

O integral pedido pode ser calculado facilmente por um integral iterado na ordem $dz \ dx \ dy$. De facto, se fixarmos $y \in [0,1]$, obtemos os seguintes cortes verticais:

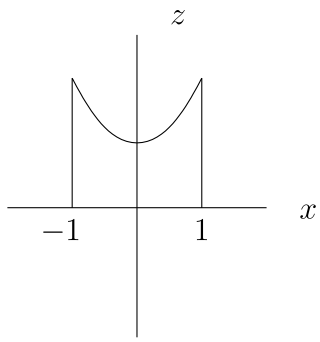

FIGURE 2

e então o integral pedido é o seguinte:

$$\begin{aligned}\iiint_S (x+1)y &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_0^{1+x^2} (x+1)y\ dz\right) dx\right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (1+x^2)(1+x)y\, dx\right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (1+x+x^2+x^3)y\, dx\right) dy \\ &= \int_0^1 y[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}]_{x=-1}^{x=1}\, dy \\ &= \frac{8}{3}\int_0^1 y\, dy = \frac{8}{3}[\frac{y^2}{2}]_{y=0}^{y=1} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

(b) Para o integral iterado pedido, há que fixar primeiro a coordenada z. Do esboço acima, é claro que, se fixarmos z, obtemos os cortes representados na Figura 1.

Com efeito, se fixarmos $z \in [0,1]$, obtemos como corte um rectângulo com $x \in [-1,1]$ e $y \in [0,1]$:

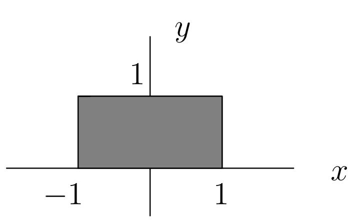

FIGURE 3

Se fixarmos $z \in [1,2]$ obtemos como corte dois rectângulos:

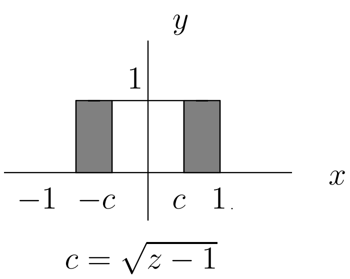

FIGURE 4

O integral iterado escreve-se então:

$$\iiint_S f = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 f(x,y,z)\ dx \right) dy \right) dz + $$
$$+ \int_1^2 \left(\int_0^1 \left(\int_{-1}^{-\sqrt{z-1}} f(x,y,z)\ dx \right) dy \right) dz$$
$$+ \int_1^2 \left(\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{z-1}}^1 f(x,y,z)\ dx \right) dy \right) dz.$$

(3 val.) (2) Calcule a massa do sólido

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le z \le x^2+y^2-1,\ x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0\},$$

cuja densidade de massa é a função $\sigma(x,y,z) = \dfrac{y^2 z}{x^2+y^2}$.

RESOLUÇÃO: O conjunto B é a região entre a superfície de revolução $z = x^2+y^2-1$, o cilindro $x^2+y^2=4$, e o plano $z=0$, com $y>0$.

Assim, vamos utilizar uma transformação $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de coordenadas cilíndricas em relação ao eixo Oz:

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \\ z &= z. \end{cases}$$

O determinante da matriz Jacobiana desta transformação é então

$$|\det(Dg(\rho,\theta,z))| = \rho$$

e, nestas coordenadas, a região é descrita por

$$g^{-1}(B) = \{(\rho,\theta,z) :\ \ 0<\theta<\pi,\ 1<\rho<2,\ \ 0<z<\rho^2-1\}.$$

Fazendo um corte com θ constante ($0<\theta<\pi$) obtemos a seguinte figura:

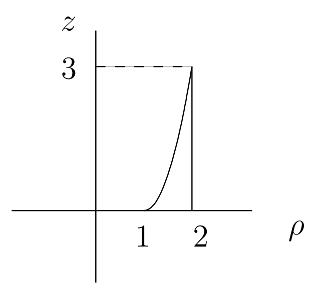

FIGURE 5

Assim, como $\sigma(g(\rho,\theta,z)) = z\sin^2\theta$, a massa do sólido B é dada por

$$\begin{aligned}
M(B) &= \iiint_B \sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{g^{-1}(B)} \rho\, z \sin^2\theta\ dz\,d\rho\,d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_1^2 \int_0^{\rho^2-1} \rho\, z \sin^2\theta\, dz\,d\rho\,d\theta = \int_0^\pi \int_1^2 \rho \sin^2\theta \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=\rho^2-1} d\rho\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \int_1^2 \rho(\rho^2-1)^2 \sin^2\theta\, d\rho\,d\theta = \frac{1}{12}\int_0^\pi \sin^2\theta\left[(\rho^2-1)^3\right]_{\rho=1}^{\rho=2} d\theta \\
&= \frac{9}{4}\int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta = \frac{9\pi}{8}.
\end{aligned}$$

(3) Considere os campos vectoriais

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{1}{4-x^2-y^2}(x, y, z+x), \quad \text{e} \quad \mathbf{G}(x,y,z) = (2x(y-1), x^2, 1).$$

a) Indique se o campo $\mathbf{G}$ é gradiente no seu domínio e, em caso afirmativo, calcule uma função potencial. (2 val.)

b) Calcule $\int_C (\mathbf{F}+\mathbf{G}) \cdot d\mathbf{g}$ onde C é o segmento de recta entre $(1,0,0)$ e $(1,0,2\pi)$, orientado no sentido ascendente. (2 val.)

c) Calcule $\int_\Gamma (\mathbf{F}+\mathbf{G})\cdot d\gamma$, onde Γ é a curva descrita por $\gamma(t) = (\cos\ t, \text{sen}\ t, t)$, com $0 \le t \le 2\pi$. (2 val.)

d) Sem calcular as derivadas parciais de F indique, justificando, se F é um campo fechado. (2 val.)

RESOLUÇÃO:

(a) G é um campo de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = 2x = \frac{\partial G_2}{\partial x}$$
$$\frac{\partial G_1}{\partial z} = 0 = \frac{\partial G_3}{\partial x}$$
$$\frac{\partial G_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial G_3}{\partial y},$$

pelo que G é um campo fechado. Como o domínio de G, $\mathbb{R}^3$, é um conjunto simplesmente conexo, conclui-se que G é um gradiente.

Um potencial ϕ para G obtém-se resolvendo o sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial\phi}{\partial x} & = & 2x(y-1) \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} & = & x^2 \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \phi(x,y,z) & = & x^2(y-1)+C_1(y,z) \\ \phi(x,y,z) & = & x^2y+C_2(x,z) \\ \phi(x,y,z) & = & z+C_3(x,y) \end{array}\right.$$

donde se conclui que um potencial para G é dado por

$$\phi(x,y,z) = x^2(y-1)+z.$$

(b) Para calcular $\int_C F\cdot dg$ podemos usar, por exemplo, a parametrização de C no sentido indicado dada por $g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$, com $g(t)=(1,0,t)$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_C F\cdot\ dg &= \int_0^{2\pi} F(g(t))\cdot g'(t)\ dt = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(1,0,t+1)\cdot(0,0,1)\ dt \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} t+1\,dt = \frac{2\pi}{3}(\pi+1).\end{aligned}$$

Para calcular $\int_C G\cdot dg$, como G é um gradiente, usamos o teorema fundamental do cálculo para integrais de linha e obtemos

$$\int_C G\cdot\ dg = \phi(1,0,2\pi)-\phi(1,0,0) = 2\pi.$$

Assim, $\int_C(F+G)\cdot\ dg = \frac{2\pi}{3}(\pi+1)+2\pi$.

(c) Para calcular $\int_\Gamma F\cdot\ d\gamma$ temos,

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F\cdot\ d\gamma &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\ dt = \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(\cos t,\sin t,t+\cos t)\cdot(-\sin t,\cos t,1)\ dt \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} t+\cos t\,dt = \frac{2\pi^2}{3}.\end{aligned}$$

Para calcular $\int_C G\cdot\ dg$, como G é um gradiente e a curva Γ tem os mesmos pontos inicial e final que a curva C, usamos o teorema fundamental do cálculo para integrais de linha e obtemos

$$\int_\Gamma G\cdot\ d\gamma = \int_C G\cdot\ dg = 2\pi.$$

Assim, $\int_C(F+G)\cdot\ dg = \frac{2\pi^2}{3}+2\pi$.

(d) O domínio do campo F é o conjunto $D=\mathbb{R}^3\setminus\{(x,y,z):\ x^2+y^2=4\}$. Como as curvas C e Γ são homotópicas em D, se F fosse um campo fechado teríamos, pela invariancia de integrais de linha de campos fechados ao longo de curvas homotópicas, $\int_\Gamma F\cdot\ d\gamma = \int_C F\cdot\ dg$. No entanto, como foi visto nas alíneas anteriores, estes dois integrais são diferentes, pelo que se conclui que F não é um campo fechado.

Alternativamente, podemos considerar $\tilde{g} := g \cup (-\gamma)$, um caminho fechado no interior do cilindro $\{(x, y, z) : x^2+y^2 = 4\}$. Então, se F fosse um campo fechado, seria um gradiente no interior do conjunto simplesmente conexo $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 4\}$ e teríamos $\int_{C\cup(-\Gamma)} F \cdot \tilde{g} = 0$. No entanto, pelas alíneas anteriores temos

$$\int_{C\cup(-\Gamma)} F \cdot d\tilde{g} = \int_C F \cdot dg - \int_\Gamma F \cdot d\gamma = \frac{2\pi^2}{3} + 2\pi - \frac{2\pi^2}{3} = 2\pi \neq 0,$$

pelo que se conclui que F não é um campo fechado.

(4) Seja R um domínio regular de $\mathbb{R}^2$ limitado por uma curva simples regular C. Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$, uma parametrização regular de C. Demonstre a seguinte fórmula para a área de R: (3 val.)

$$\text{Área}(R) = \frac{1}{2}\int_a^b (x\, y' - y\, x')\, dt.$$

Utilizando esta fórmula, calcule a área da região do plano limitada pela curva $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-x_0)^2}{h^2} + \frac{(y-y_0)^2}{k^2} = 1\right\}$, em que $h, k > 0$ e $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Resolução:

Considerando o campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $F(x, y) = (-y, x)$ temos, pelo teorema de Green,

$$\int_C F \cdot d\alpha = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \iint_R 2\, dx\, dy = 2\text{Área}(R),$$

onde $P(x, y) = F_1(x, y) = -y$ e $Q(x, y) = F_2(x, y) = x$.

Por outro lado, pela definição de integral de linha de um campo vectorial, temos

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot d\alpha &= \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt = \int_a^b (-y(t), x(t)) \cdot (x'(t), y'(t))\, dt \\ &= \int_a^b (x\, y' - y\, x')\, dt,\end{aligned}$$

pelo que

$$\text{Área}(R) = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)\, y'(t) - y(t)\, x'(t))\, dt.$$

Utilizando esta fórmula e a parametrização da curva C dada por

$$\alpha(t) = (x_0 + h\cos t,\ y_0 + k\sin t), \quad \text{com} \quad t \in [0, 2\pi],$$

temos

$$\begin{aligned}
\text{Área}(R) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x\,y' - y\,x')\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} k(x_0 + h\cos t)\cos t + h(y_0 + k\sin t)\sin t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x_0 k\cos t + y_0 h\sin t + h\,k\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[x_0 k\sin t - y_0 h\cos t + h\,k\,t\right]_0^{2\pi} = hk\pi.
\end{aligned}$$