Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

Teste 2 - 17 de Dezembro de 2005

apresente e justifique todos os cálculos
duração: uma hora e meia

(1) Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 \, , \, 0 < z < 2\}.$$

(2,5 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.

Resolução: Consideremos a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. A função f é de classe $\mathcal{C}^\infty$, e $Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -2z \end{bmatrix}$. A matriz $Df(x, y, z)$ tem característica 1 em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ excepto a origem. Seja U o aberto de $\mathbb{R}^3$ dado por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 2\}$. Como $M = \{(x, y, z) \in U : f(x, y, z) = 0\} \subset U \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ($(0, 0, 0) \notin M$), concluímos que M é uma subvariedade de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2.

(3 val.) (b) Determine uma base para o espaço tangente $T_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)} M$ e outra para o espaço normal $(T_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)} M)^\perp$.

Resolução: A (única) linha da matriz $Df(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ é igual a $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2)$ e gera o espaço normal $(T_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)} M)^\perp$. O espaço tangente é o plano em $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
T_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)} M &= \{v \in \mathbb{R}^3 : \, Df(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1) \cdot v = 0\} \\
&= \{v = (v_1, v_2, v_3) : \, \sqrt{2} v_1 + \sqrt{2} v_2 - 2 v_3 = 0\} \\
&= \{v \in \mathbb{R}^3 : \, v = (1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}) v_1 + (0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}) v_2, \, v_1, \, v_2 \in \mathbb{R}\},
\end{aligned}$$

pelo que uma base deste espaço é, por exemplo, $\{(\sqrt{2}, 0, 1), (0, \sqrt{2}, 1)\}$.

(2,5 val.) (c) Calcule a massa de M sabendo que a sua densidade é dada por $\sigma(x, y, z) = z$.

Resolução: Uma parametrização para M é por exemplo

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, \rho), \quad 0 < \rho < 2, \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

de classe C^1. Temos então que

$$\begin{aligned}
\text{Massa de M} &= \int_M \sigma \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sigma(g(\rho, \theta)) \sqrt{\det Dg^t Dg} \, d\rho \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sigma(g(\rho, \theta)) ||D_1 g \times D_2 g|| \, d\rho \, d\theta \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^2 \, d\rho \, d\theta \\
&= \sqrt{2} \, \frac{16}{3} \pi,
\end{aligned}$$

onde usámos o facto que $||D_1 g \times D_2 g|| = ||(-\rho \cos\theta, -\rho \sin\theta, \rho)|| = \sqrt{2} \rho$ e $\sigma(g(\rho, \theta)) = \rho$.

(3 val.) (d) Determine o ponto da intersecção de M com o plano

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=\frac{1}{2}(1-x)\}$$

onde a densidade $\sigma(x,y,z)=z$ é máxima. Justifique.

Resolução: Designe-se por C a intersecção de M com o plano referido. Tem-se que $(x,y,z)\in C$ se e só se

$$x^2+y^2=z^2 \quad \text{e} \quad z=\frac{1}{2}(1-x).$$

Logo $x^2+y^2=(1-x)^2/4$ ou seja $\frac{9}{4}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+3y^2=1$. Portanto C é a imagem de uma elipse no plano $\mathbb{R}^2$ por uma função contínua. Como as elipses são conjuntos fechados e limitados, resulta que C é um conjunto fechado e limitado. Portanto $\sigma : C\to\mathbb{R}$ tem um máximo é um mínimo absolutos em C. Para determinar o valor máximo usamos o método dos multiplicadores de Lagrange. O conjunto C é o conjunto de nível zero da função de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, $F(x,y,z)=(x^2+y^2-z^2,\, z-\frac{1}{2}(1-x))$,

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=0,\, z-\frac{1}{2}(1-x)=0\}.$$

Concluímos que se $(x,y,z)\in C$ é um extremo de σ, então existem λ_1 e λ_2 tais que

$$\begin{cases} D(z+\lambda_1(x^2+y^2-z^2)+\lambda_2(z-\frac{1}{2}(1-x)))=0 \\ x^2+y^2=z^2 \\ z=\frac{1}{2}(1-x), \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x+\frac{\lambda_2}{2} &= 0 \\ 2\lambda_1 y &= 0 \\ 1-2\lambda_1 z+\lambda_2 &= 0 \\ x^2+y^2-z^2 &= 0 \\ 2z+x &= 1 \end{cases}$$

Da 2ª equação concluímos que $\lambda_1=0$ ou $y=0$. Substituindo $\lambda_1=0$ na 1ª equação obtemos $\lambda_2=0$. Substituindo $\lambda_1=\lambda_2=0$ na 3ª equação obtemos $1=0$ pelo que λ_1 não pode ser igual a zero. Suponhamos então que $y=0$. Substituindo na 4ª equação obtemos $x^2=z^2$, i.e. $z=x$ ou $z=-x$. Substituindo na última equação obtemos $2x=1-x\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$, ou $-2x=1-x\Leftrightarrow x=-1$. Temos portanto dois pontos de C, $P_1=(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3})$ e $P_2=(-1,0,1)$ que são, respectivamente, o mínimo e o máximo de $\sigma=z$. O valor máximo da densidade é então $\sigma(-1,0,1)=1$.

(2) Seja S a superfície

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=4,\, 0<z<2\}$$

e $\boldsymbol{\eta}(x,y,z)$ a normal unitária em S cuja terceira componente é positiva. Considere os campos vectoriais

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(-xz, xz^2-x^3, z^2) \quad \text{e} \quad \mathbf{G}(x,y,z)=\left(\frac{zy}{x^2+y^2}, -\frac{zx}{x^2+y^2}, 0\right).$$

Calcule

(3 val.) (a) o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S no sentido de $\boldsymbol{\eta}$.

Resolução: Consideremos o aberto $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z^2 + 4\,,\, 0 < z < 2\}$. Tem-se $\partial D = S \cup B_1 \cup B_2$, em que $B_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\,,\, x^2 + y^2 \leq 4\}$ e $B_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2\,,\, x^2 + y^2 \leq 8\}$. Aplicando o teorema de divergência temos

$$\begin{aligned}\iiint_D \operatorname{div} F &= \int_{\partial D} F \cdot \boldsymbol{\eta}_{\text{ext}}\, dS \\ &= \int_S F \cdot \boldsymbol{\eta}_{\text{ext}}\, dS + \int_{B_1} F \cdot \boldsymbol{\eta}_{\text{ext}}\, dS + \int_{B_2} F \cdot \boldsymbol{\eta}_{\text{ext}}\, dS.\end{aligned}$$

pelo que, observando que $-\boldsymbol{\eta}$ é o vector normal unitário *exterior*, obtém-se que o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S no sentido de $\boldsymbol{\eta}$ é

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}\, dS &= -\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} + \int_{B_1} \mathbf{F} \cdot (0,0,-1)\, dS + \int_{B_2} \mathbf{F} \cdot (0,0,1)\, dS \\ &= -\iiint_D z - \int_{B_1} z^2 + \int_{B_2} z^2 \\ &= -\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4+z^2}} z\rho\, d\rho\, d\theta\, dz + \int_{B_2} 4 \\ &= -12\pi + 4\text{área}(B_2) = -12\pi + 4 \cdot 8\pi = 20\pi.\end{aligned}$$

(3 val.) (b) o fluxo de $\operatorname{rot} \mathbf{G}$ através de S no sentido de $\boldsymbol{\eta}$.

Resolução: Aplicamos o teorema de Stokes. A fronteira da superfície S é $\partial S = C_1 \cup C_2$, em que $C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0,\, x^2 + y^2 = 4\}$ e $C_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2,\, x^2 + y^2 = 8\}$. C_2 tem uma parametrização $h_2(\theta) = (\sqrt{8}\text{cos}\theta, \sqrt{8}\text{sen}\theta, 2)$ e C_1 tem uma parametrização $h_1(\theta) = (2\text{cos}\theta, -2\text{sen}\theta, 0)$, em que $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Além disso, estas parametrizações são compatíveis com a orientação associada ao vector $\boldsymbol{\eta}$. Usando o teorema de Stokes, obtém-se que o fluxo de $\operatorname{rot} \mathbf{G}$ através de S no sentido de $\boldsymbol{\eta}$ é

$$\begin{aligned}\int_S \operatorname{rot} \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\eta}\, dS &= \int_{\partial S} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{g} = \int_{C_1} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{h_1} + \int_{C_2} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{h_2} \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{G}(h_1(\theta)) \cdot h_1'(\theta) + \mathbf{G}(h_2(\theta)) \cdot h_2'(\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2\sqrt{8}\text{sen}\theta}{8}, -\frac{2\sqrt{8}\text{cos}\theta}{8}, 0 \right) \cdot (-\sqrt{8}\text{sen}\theta, \sqrt{8}\text{cos}\theta, 0)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -2\, d\theta = -4\pi.\end{aligned}$$

(3 val.) (3) Seja $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$. Dada uma função $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ declasse $\mathcal{C}^2$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

para $(x,y,z) \in D$ e $t > 0$, mostre que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D f^2\, dxdydz = &-\iiint_D \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right\|^2 dxdydz \\ &+ \int_{\partial D} f \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot \eta_{\text{ext}}\, dS,\end{aligned}$$

onde η_{ext} é a normal unitária em ∂D, exterior a D.

Resolução: Seja $F(t) = \frac{1}{2}\iiint_D f^2\, dxdydz$. Consideremos o compacto $\bar{D}$ (fecho de D). As funções f^2 e $\frac{\partial f^2}{\partial t} = 2f\frac{\partial f}{\partial t}$ são contínuas em $\bar{D}\times]0,\infty[$ pelo que a função F está definida em $]0,\infty[$, é de classe C^1 e a ela aplica-se a regra de Leibnitz. Temos então,

$$
\begin{aligned}
F'(t) &= \frac{dF}{dt}(t)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_D f^2\, dxdydz\right)(t)\\
&= \iiint_D f(x,y,z,t)\frac{\partial f}{\partial t}(x,y,z,t)\, dxdydz\\
&= \iiint_D f(x,y,z,t)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)(x,y,z,t)\, dxdydz\\
&= \iiint_D \left[\operatorname{div}\left(f\frac{\partial f}{\partial x}, f\frac{\partial f}{\partial y}, f\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x,y,z,t) - \left\|\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\right\|^2(x,y,z,t)\right] dxdydz\\
&= -\iiint_D \left\|\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\right\|^2 (x,y,z,t)\, dxdydz +\\
&\quad \iiint_D \operatorname{div}\left(f\frac{\partial f}{\partial x}, f\frac{\partial f}{\partial y}, f\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x,y,z,t)\, dxdydz\\
&= -\iiint_D \left\|\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\right\|^2 (x,y,z,t)\, dxdydz +\\
&\quad \iiint_{\partial D} \left(f\frac{\partial f}{\partial x}, f\frac{\partial f}{\partial y}, f\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x,y,z,t)\cdot \eta_{\text{ext}}(x,y,z,t)\, dS \quad \text{pelo teorema de divergência.}
\end{aligned}
$$