Análise Matemática III

Exercícios

Cálculo de integrais de linha pela definição.

1 Calcule o integral do campo vectorial F ao longo do caminho indicado.

a) $F(x,y) = (x^2 - 2xy)\mathbf{i} + (y^2 - 2xy)\mathbf{j}$, de $(-1,1)$ a $(1,1)$ ao longo da parábola $y = x^2$.

b) $F(x,y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j}$, de $(0,0)$ a $(2,0)$ ao longo da curva $y = 1 - |1-x|$.

c) $F(x,y) = (2a - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ao longo do caminho $\alpha(t) = a(t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

d) $F(x,y) = (x+y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}$ uma vez à volta da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ no sentido contrário aos ponteiros do relógio.

e) $F(x,y,z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ de $(1,0,2)$ a $(3,4,1)$ ao longo de um segmento de recta.

f) $F(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (xz - y)\mathbf{k}$ ao longo do caminho $\alpha(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}$ com $0 \leq t \leq 1$.

2 Calcule

$$\int_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$$

onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ percorrida uma vez no sentido dos ponteiros do relógio.

3 Calcule

$$\int_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$$

onde C é o quadrado com vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$ percorrido uma vez no sentido contrário à dos ponteiros do relógio.

4 Calcule

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

onde C é

a) a curva formada pela intersecção das duas superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x+y)$ percorrida uma vez no sentido que visto da origem parece o dos ponteiros do relógio.

b) a intersecção das superfícies $z = xy$ e $x^2 + y^2 = 1$ percorrida uma vez no sentido que parece contrário ao dos ponteiros do relógio quando visto de muito acima do plano xOy.

5 Calcule o trabalho realizado pela força $F(x,y) = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ sobre uma partícula que se desloca uma vez, no sentido dos ponteiros do relógio, à volta do quadrado limitado pelos eixos coordenados e pelas rectas $x = a$ e $y = a$ onde $a > 0$.

6 Calcule o trabalho realizado pela força $F(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + x(y+1)\mathbf{k}$ sobre uma partícula que se desloca uma vez à volta do triângulo com vértices $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ e $(-1,1,-1)$ percorridos por esta ordem.

7 Um campo de forças bidimensional é dado pela expressão $F(x,y) = cxy\mathbf{i} + x^6y^2\mathbf{j}$ onde c é uma constante. A força actua numa partícula que se move ao longo de uma curva da forma $y = ax^b$ com $a > 0, b > 0$ entre o ponto $(0,0)$ e a linha $x = 1$. Calcule, em termos de c, o valor de a tal que o trabalho realizado pela força é independente de b.

8 Calcule o trabalho realizado pela força $F(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ ao longo da curva de intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e do cilindro $x^2 + y^2 = ax$ onde $z \geq 0$ e $a > 0$, percorrido num sentido que parece o dos ponteiros do relógio quando observado de muito acima do plano xOy.

9 Calcule $\int_C y^2 ds$ onde C é descrita pelo caminho $\alpha(t) = a(t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}$ com $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

10 Considere um filamento homogéneo semicircular de raio a.

a) Mostre que o centróide se encontra no eixo de simetria a uma distância de $\frac{2a}{\pi}$ do centro.

b) Mostre que o momento de inércia em relação ao eixo definido pelos extremos do filamento é $\frac{1}{2}Ma^2$ onde M designa a massa do filamento.

11 Calcule a coordenada z do centróide de um filamento unindo os pontos $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, \sqrt{2})$ e descrevendo a curva de intersecção das superfícies $x^2 + y^2 = z^2$ e $y^2 = x$.

12 Esboce a espiral descrita pelo caminho

$$\alpha(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \text{ com } 0 \leq t \leq 4\pi$$

e calcule a sua massa se a densidade de massa for dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.