Análise Matemática III
Exercícios

Funções limite superior e funções integráveis.

1 Recorde que se S é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, a função característica de S, χ_S é definida por

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S \\ 0 & \text{se } x \notin S \end{cases}$$

Esboce o gráfico das seguintes funções e diga, justificando, se são ou não funções limite superior:

a) $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}\ \chi_{[k,\, k+1)}$

b) $f(x) = \begin{cases} -k\ , & \text{se } x \in \left(\frac{1}{(k+1)!}, \frac{1}{k!}\right], \quad (k = 1, 2, \cdots), \\ 0\ , & \text{caso contrário} \end{cases}$

c) $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k\ \chi_{[2^k,\, 2^k + 2^{-2k}]}$

d) $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\ \chi_{\left(\frac{1}{(k+1)!},\, \frac{1}{k!}\right]}$

2 Calcule os integrais das funções das alíneas a) e c) do problema anterior.

3 Mostre que a função $f : [0,1]^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \operatorname{sen}(xy) + z & \text{se } xyz \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é uma função integrável.

4 Mostre que a função $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}$ é uma função limite superior.

5 Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2}$$

é uma função limite superior.

6 Dê um exemplo de uma função contínua $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in U(]0,1[)$ mas $-f \notin U(]0,1[)$ (apesar de ser integrável).