Análise Matemática III
Exercícios

Conjuntos de medida nula

1 Indique justificadamente quais dos seguintes conjuntos têm medida nula.

a) $A = \{ln(|q|+1):\ q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$

b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ y = \operatorname{sen}(x)\}$

c) Um subconjunto aberto não vazio de $\mathbb{R}^n$.

d) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$

e) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ x^2+y^2 \leq 1\}$

f) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ x^2+y^2 \leq 1,\ z = 0\}$

g) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ x+y+z = 0,\ x-y+z = 1\}$

h) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = \frac{1}{n}+\frac{1}{m},\ x \notin \mathbb{Q},\ n,m \in \mathbb{N}\}$

i) $A = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : w = e^{x-y\operatorname{sen}(z)}\}$

j) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \lim_{n\to\infty}[sen(xy)]^n = 1\}$

2 Diga justificadamente quais das seguintes propriedades são válidas quase em toda a parte.

a) A distância de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ à origem é menor do que 1.

b) $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ está numa recta de declive irracional que passa pela origem.

c) $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ para $|x| \leq 1$.

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+(x^2+y^2+z^2)^n}$ é uma função contínua no ponto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

e) $x \in \mathbb{R}$ é tal que $\lim_{n\to\infty} n\operatorname{sen}(\frac{x}{n}) \in \mathbb{Q}$.

3 Prove que um intervalo de $\mathbb{R}^{n-1}$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$.

4 Prove que a fronteira de um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de conteúdo nulo tem conteúdo nulo.

5 Dê um exemplo de um conjunto limitado de medida nula cuja fronteira não tenha medida nula.

6 Prove que o conjunto de pontos de descontinuidade de uma função monótona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tem medida nula.

7 Seja $A_0 = [0,1]$. Dividamo-lo em três partes iguais e retiremos-lhe o intervalo aberto do meio, $]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$. Obtemos assim o conjunto $A_1 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$. Repetindo o processo, retiramos o terço do meio aos intervalos $[0,\frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3},1]$. Obtemos o conjunto $A_2 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$. Continuando, obtemos sucessivamente os conjuntos $A_3, A_4, \ldots, A_n, \ldots$. Seja $C = \cap_n A_n$. Prove que C é um conjunto não vazio e tem medida nula.

É possível provar (tente!) que C não é numerável. C é portanto um exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}$ não numerável e com medida nula.