Análise Matemática III
Exercícios

Complementos de Cálculo Integral
Teoremas de Convergência. Integrabilidade

1. Calcule $\lim\limits_{nto\infty} \int_0^\infty \frac{r^n}{1+r^{n+2}} dr$

2. Calcule o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx$

3. Seja $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{sen^2 x}{x^2}$. Prove que f é integrável em $]0,+\infty[$.

4. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\pi \frac{\sqrt[n]{x}}{1+x^2} dx.$

5. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\cos(x/n)}{1+x^2} dx.$

6. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\cos^n(x) dx.$

7. Decida se existe ou não o integral $\int_1^\infty (t\,\mathrm{sen}(\frac{1}{t}) - 1)dt$

8. Decida se existe ou não o integral $\int_1^\infty (1-e^{-1/t^2})dt$. (Sugestão: Considere $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1-e^{-1/t^2}}{1/t^2}$).

9. Calcule $\int_B \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy$ em que $B = \{(x,y)\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}$.

10. Use o teorema da Convergência Dominada para calcular
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)^n} dxdy$$

11. Prove que a função dada por $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ é integrável no conjunto $[1,\ +\infty[$ e calcule o respectivo integral.

12. Considere o conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y^2 < 1,\ x > 1,\ 0 < y < 1\}$ e a função$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, definida por $f_\alpha(x,y) = x^\alpha$.
    i) Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais f_α é integrvel em S.
    ii) Para cada α determinado na alínea anterior, calcule $\int_S f_\alpha$. Justifique todos os cálculos.

13. Seja $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $f_n(x,y) = \dfrac{1+cos^n(x-y)}{(x^2+y^2+1)^2}$. Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_n$ existe e calcule o seu valor. Justifique.

14. Seja γ_n o gráfico da função $f_n(x) = x^{\frac{n+1}{n}}$ definida no intervalo $[0,1]$. Seja $l(\gamma_n)$ o comprimento de γ_n. Mostre que $\lim_{n\to\infty} l(\gamma_n) = \sqrt{2}$.

15. Calcule, justificadamente,

i)

$$\lim_{k\to\infty}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{1+(|x|+|y|)^k}\,dx\,dy$$

ii)

$$\iiint_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dxdydz$$

em que $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2>1\}$

iii)

$$\lim_{k\to\infty}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{1+(x^2+y^2)^{k+1}}\,dxdy$$

16. Sejam $f_n:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, as funções definidas por $f_n(x,y)=\dfrac{e^{-(x^2+y^2)^n}}{1+x^2+y^2}$. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} f_n$. Justifique os cálculos.

17. Sejam $f_k:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(k\in\mathbb{N})$, as funções definidas por

$$f_k(x,y)=\frac{1+(cos(x^2+y^2))^{2k}}{1+(x^2+y^2)^{2k}}$$

   i) Prove que as funções f_k so integráveis em $\mathbb{R}^2$.
   ii) Calcule $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} f_k$. Justifique todos os cálculos.

18. Considere a função

$$f(t)=\int_0^t \operatorname{sen}(x)e^{-tx^2}dx$$

em que $t>0$. Prove que f é diferenciável e escreva uma expressão para a derivada $f'(t)$.

19. Considere a função real de variável real F definida para $t>0$ por

$$F(t)=\int_t^{\infty} e^{-tx^2}dx$$

   i) Verifique que F está bem definida e calcule o limite $\lim\limits_{t\to 0^+}F(t)$.
   ii) verifique que F é diferenciável em todo o seu domínio e calcule uma espressão para a sua derivada.

20. Seja $f(t)=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(ts)}{s}ds \quad (t>0)$

   a) Justifique que f é diferenciável em $]0,+\infty[$.
   b) Calcule $f'(t)$.

21. Para cada $t>0$, seja $F(t)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}}{1+x^2}dx$.

   a) Mostre que F está bem definida.
   b) Mostre que se verifica a relação: $F''(t)+F(t)=1/t$.

22. Mostre que, para cada $t>0$, se tem: $\ln t=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}-e^{-xt}}{x}dx$