Análise Matemática III
1º semestre de 2006/2007

Exercício teste 10 (a entregar na aula prática da semana de 27/11/2006)

Calcule o momento de inércia relativo ao eixo Oz da superfície S dada por:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2};\ 1 < x^2+y^2 < 4\},$$

com densidade de massa por área igual a 1, de duas maneiras diferentes:

a) usando uma parametrização com as coordenadas cilíndricas ρ e θ como parâmetros;

b) usando uma parametrização com as coordenadas cartesianas x e y como parâmetros, fazendo depois uma mudança de coordenadas para coordenadas polares r e θ.

Resolução
A equação $z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$ define um cone com vértice o ponto $(0,0,4)$ e eixo o eixo Oz. A superfície S é a parte do cone limitada pelas curvas:

$$\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4;\ z = 0\big\} \text{ e } \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1;\ z = 2\big\}.$$

O momento de inércia I_z de S relativo ao eixo Oz é dado pelo integral

$$I_z = \int_S (x^2+y^2).$$

a) Uma parametrização de S (excluindo um segmento de recta) é dada por:

$$g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 4-2\rho), \quad \rho \in]1,2[, \quad \theta \in]0,2\pi[.$$

A matriz derivada da parametrização é portanto

$$Dg(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim obtemos:

$$\begin{aligned} ||D_\rho g \times D_\theta g|| = \sqrt{\det(Dg^t Dg)} &= \sqrt{\det\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & -2 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \\ -2 & 0 \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{\det\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}} = \sqrt{5}\rho. \end{aligned}$$

Calculamos então o integral:

$$\begin{aligned}\int_S (x^2+y^2) &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \rho^2.\sqrt{5}\rho\, d\rho\, d\theta \\ &= \sqrt{5}.2\pi.\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 = \frac{15\sqrt{5}\pi}{2}.\end{aligned}$$

b) Uma parametrização de S é dada por:

$$h(x,y) = (x, y, f(x,y)), \quad (x,y) \in T$$

onde $f(x,y) = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$ e T é a região no plano Oxy:

$$T = \left\{(x,y) : 1 < x^2+y^2 < 4\right\}.$$

Neste caso o factor no integral é dado por:

$$\begin{aligned}||D_x h \times D_y h|| = \sqrt{\det(Dh^t Dh)} &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} = \sqrt{5}.\end{aligned}$$

Portanto o integral é dado por:

$$\int_S (x^2+y^2) = \int_T (x^2+y^2)\sqrt{5}\, dx\, dy.$$

Fazendo uma mudança de coordenadas para coordenadas polares r e θ, a região planar T (excluindo um segmento de recta) é descrita pelas desigualdades: $0 < \theta < 2\pi$; $1 < r < 2$. Assim obtemos:

$$\int_S (x^2+y^2) = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2\sqrt{5}\, r\, dr\, d\theta = \frac{15\sqrt{5}\pi}{2}.$$