Análise Matemática III
1º semestre de 2006/2007

Exercício teste 1 (a entregar na aula prática da semana de 18/9/2006)

1) Considere a região $V \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - (x^2 + y^2), \ \ 0 \leq x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq 1\}.$$

a) Esboce a região V. Descreva **detalhadamente** as figuras que obtém através da intersecção de V com planos horizontais (i.e. planos de equação $z = const.$).

b) Descreva **detalhadamente** as figuras que obtém através da intersecção de V com planos perpendiculares ao eixo Oy (i.e. planos de equação $y = const.$).

Resolução

a) A equação $z = 2 - (x^2 + y^2)$ descreve um parabolóide invertido cujo eixo de simetria é o eixo Oz: esta superfície pode ser obtida por revolução da parábola descrita por $x = 0$ e $z = 2 - y^2$ em torno do eixo Oz. A condição $0 \leq z \leq 2 - (x^2 + y^2)$ indica que nos interessa a região entre o parabolóide e o plano coordenado $z = 0$. No entanto, temos também as condições $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$ que nos indicam que a base do sólido é o quadrado dado por $(x, y, 0)$ com $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.

Sobre a aresta do quadrado dada por $x = 0, 0 \leq y \leq 1$ temos $0 \leq z \leq 2 - y^2$, ou seja, a intersecção do sólido com o plano coordenado $x = 0$ é dada pela região desse plano limitada por $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 2 - y^2$. Na aresta do quadrado dada por $y = 0$ e $0 \leq x \leq 1$ obtemos o mesmo resultado substituindo y por x.

Sobre a aresta do quadrado dada por $x = 1, 0 \leq y \leq 1$, obtemos $0 \leq z \leq 1 - y^2$. Portanto, a intersecção do sólido com o plano $x = 1$ é dada pela região desse plano limitada por $0 \leq y \leq 1$ e por $0 \leq z \leq 1 - y^2$. Na aresta do quadrado dada por $y = 1$ e $0 \leq x \leq 1$ obtemos o mesmo resultado substituindo y por x.

O sólido tem a forma representada na figura 1:

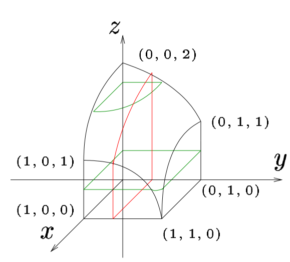

Figure 1:

Para $1 \leq z \leq 2$ os cortes horizontais de equação $z = const.$ são quartos de círculo, com raio $\sqrt{2-z}$. O valor do raio é obtido pondo $z = const.$ na equação do parabolóide e resolvendo para x, y obtendo-se a equação $x^2+y^2 = 2-z$. Estes cortes estão representados a verde na Figura 1 e na figura 2.

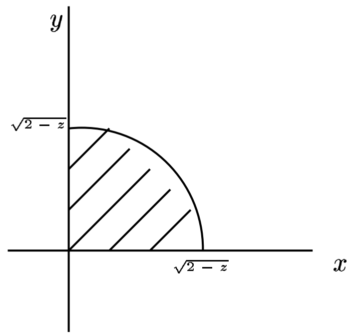

Figure 2: Cortes perpendiculares a Oz com $1 < z < 2$.

Para $0 \leq z < 1$ estes círculos começam a sair parcialmente do quadrado e os cortes horizontais para estes valores de z são obtidos pela intersecção do círculo de raio $\sqrt{2-z}$ com o quadrado $0 \leq x, y \leq 1$. Estes cortes estão também representados a verde na figura 1 e na figura 3.

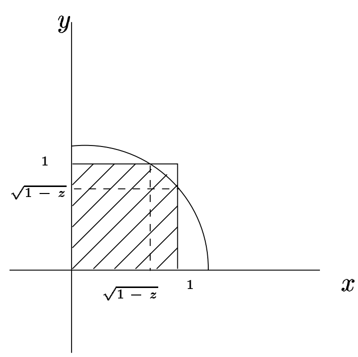

Figure 3: Cortes perpendiculares a Oz com $0 < z < 1$.

b) Os cortes de equação $y = const.$ estão representados a vermelho na figura 1 e na figura 4. São figuras planas limitadas pelas condiçẽs $0 \leq x \leq 1$ e z entre $z = 0$ e a parábola $z = (2-y^2) - x^2$, com $y = const.$ fixo num valor entre 0 e 1.

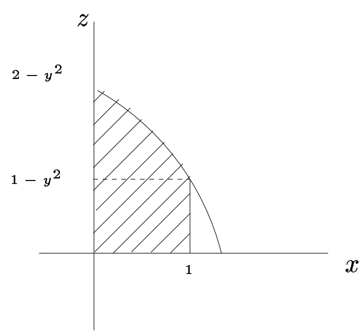

Figure 4: Cortes perpendiculares a Oy com $0 < y < 1$.