Análise Matemática III
1º semestre de 2006/2007

Exercício teste 4 (a entregar na aula prática da semana de 9/10/2006)

Considere a meia bola

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2; z > 0\}.$$

a) Usando uma mudança de coordenadas para coordenadas esféricas, calcule a coordenada $\overline{z}$ do centroide de D. (Observação: por simetria as coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ são obviamente ambas iguais a 0).

b) Usando coordenadas cilíndricas (ρ, θ, y) à volta do eixo Oy (ou seja: $z = \rho\cos\theta$, $x = \rho\sin\theta$, $y = y$), escreva uma expressão na forma de um integral triplo $\int\int\int d\rho\, d\theta\, dy$ para o momento de inércia de D relativo ao eixo paralelo ao eixo Oy que passa pelo ponto $(0, 0, 3R/8)$, usando uma densidade de massa por volume de D dada pela expressão:

$$\frac{x^2 + y^2}{R^2}.$$

Resolução

a) Em coordenadas esféricas a meia bola D é descrita por:

$$0 < r < R, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < \phi < \pi/2$$

e z é dada por $z = r\cos\phi$. O módulo do Jacobiano para a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas é $r^2 \sin\phi$. Assim

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \frac{\int_D z}{\int_D 1} \\
&= \frac{\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R (r\cos\phi) r^2 \sin\phi\, dr\, d\theta\, d\phi}{\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2 \sin\phi\, dr\, d\theta\, d\phi} \\
&= \frac{\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \cos\phi\sin\phi\, d\theta\, d\phi}{\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \sin\phi\, d\theta\, d\phi} \\
&= \frac{\frac{2\pi R^4}{4}\int_0^{\pi/2} \sin(2\phi)/2\, d\phi}{\frac{2\pi R^3}{3}\int_0^{\pi/2}\sin\phi\, d\phi} \\
&= \frac{3R}{4}\frac{[-\cos(2\phi)/4]_0^{\pi/2}}{[-\cos\phi]_0^{\pi/2}} = \frac{3R}{4}\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{3R}{8}.
\end{aligned}$$

b) Nas coordenadas cilíndricas indicadas a meia bola D é descrita por:

$$-R < y < R, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad 0 < \rho < \sqrt{R^2 - y^2}.$$

O momento de inércia de D relativo ao eixo indicado é dado por:

$$I = \int_D (x^2 + (z - 3R/8)^2).\delta$$

onde δ representa a densidade de massa por volume. O módulo do Jacobiano para a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas é ρ. Fazendo a mudança de coordenadas, obtém-se a seguinte expressão para I:

$$\int_{-R}^{R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{0}^{\sqrt{R^2-y^2}} (\rho^2 \sin^2\theta + (\rho\cos\theta - 3R/8)^2) \frac{\rho^2 \sin^2\theta + y^2}{R^2} \rho d\rho \, d\theta \, dy$$