Análise Matemática IV
2º semestre de 2000/2001

Exercício-teste 10

Resolva o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{4}y + \dfrac{1}{1+t^2} \\[2ex] y' = x - \dfrac{1}{2}y + \dfrac{2}{1+t^2} \end{cases}$$

com a seguinte condição inicial:

$$x(0) = y(0) = 0$$

Resolução

O sistema pode ser posto na seguinte forma matricial:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{h}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{h} = \frac{1}{1+t^2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Cálculo de $e^{t\mathbf{A}}$:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}-\lambda) &= \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) + \frac{3}{4} \\ &= -\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\lambda + \lambda^2 + \frac{3}{4} \\ &= -\lambda + \lambda^2 \\ &= \lambda(\lambda - \mathbf{1}) \end{aligned}$$

Então os valores próprios de $\mathbf{A}$ são $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.

Cálculo dos valores próprios:
Para $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0$$

$$2u - v = 0$$

temos os vectores próprios: $u\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Para $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0$$

$$2u - 3v = 0$$

temos os vectores próprios: $u \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Portanto

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{S}^{-1}$$

com

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Temos

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3e^t \\ 2 & 2e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3e^t-1}{2} & 3\frac{1-e^t}{4} \\ e^t - 1 & \frac{3-e^t}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Uma vez calculado $e^{t\mathbf{A}}$ temos pela fórmula da variação das constantes:

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{h}(s)\, ds$$

Atendendo à condição inicial $\mathbf{x}(0) = 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= int_0^t \frac{1}{1+s^2} \begin{bmatrix} \frac{3e^{(t-s)}-1}{2} & 3\frac{1-e^{(t-s)}}{4} \\ e^{(t-s)} - 1 & \frac{3-e^{(t-s)}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{1+s^2} \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right) e^{(t-s)} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \\ (1-1)\, e^{(t-s)} + (-1+3) \end{bmatrix} ds \\ &= int_0^t \frac{1}{1+s^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \arctan t \end{aligned}$$

Pelo que a solução do sistema dado é:

$$\begin{cases} x(t) = \arctan t \\ y(t) = 2\arctan t \end{cases}$$