Análise Matemática IV
2º semestre de 2000/2001

Exercício-teste 12

Seja $k > 0$. Resolva o seguinte equação de calor com as condições de Dirichlet:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0\\ u(t,0) &= 0\\ u(t,1) &= 0\\ u(0,x) &= 5(1+x)^2 - 15x - 5.\end{aligned}$$

Resolução

Designa-se por $f(x) = 5(1+x)^2 - 15x - 5$. A solução $u(t,x)$ é dada por

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-kn^2\pi^2 t} \operatorname{sen}\big(n\pi x\big), \quad b_n = 2\int_0^1 f(x)\cdot \operatorname{sen}\big(n\pi x\big)\, dx$$

Tem-se que

$$\begin{aligned}b_n &= 2\int_0^1 \big(5(1+x)^2 - 15x - -5\big)\cdot \operatorname{sen}\big(n\pi x\big)\, dx\\ &= 2\int_0^1 5(x^2 - x)\cdot \operatorname{sen}\big(n\pi x\big)\, dx\\ &= 10\cdot \big[\frac{-2+2\cos(n\pi)}{n^3\pi^3}\big]\\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par}\\ -\frac{40}{n^3\pi} & \text{se } n \text{ é impar.}\end{cases}\end{aligned}$$

Logo

$$u(t,x) = -\frac{40}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-k(2n+1)^2\pi^2 t}\cdot \frac{\operatorname{sen}\big((2n+1)\pi x\big)}{(2n+1)^3}.$$