

# Análise Matemática IV

## 2º semestre de 2000/2001

### Exercício-teste 2

Considere-se a função

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^2}{z} & \text{se } z \neq 0, \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Determine se  $f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z}$  existe.

### Resolução

Se  $z \neq 0$ , então existem  $r > 0$  e  $0 \leq \theta < 2\pi$  tais que  $z = r \operatorname{cis}(\theta)$ . Note-se que  $\operatorname{cis}(\theta) = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$ . Obtém-se que

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{(\bar{z})^2}{z^2} = \frac{r^2 \operatorname{cis}(-2\theta)}{r^2 \operatorname{cis}(2\theta)} = \operatorname{cis}(-4\theta).$$

Segue-se que  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z}$  não existe. Por exemplo, se  $z = r \operatorname{cis}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}r}{2}(1 + i)$ , então

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r \operatorname{cis}(\frac{\pi}{4}))}{r \operatorname{cis}(\frac{\pi}{4})} = \operatorname{cis}(-\pi) = -1,$$

e se  $z = r \operatorname{cis}(0) = r$ , então

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r \operatorname{cis}(0))}{r \operatorname{cis}(0)} = \operatorname{cis}(0) = 1.$$

**Comentário:** A título de curiosidade, note-se que se  $z \neq 0$ , tem-se que

$$f(z) = \frac{(\bar{z})^2}{z} = \frac{(\bar{z})^2 \bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{(\bar{z})^3}{|z|^2}.$$

Logo,

$$u(x, y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} \qquad v(x, y) = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2},$$

onde  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} = 1 & \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3}{y^3} = 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^3} = 0 & -\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{0}{x^3} = 0, \end{aligned}$$

e as equações de Cauchy-Riemann são válidas na origem. Mas as derivadas parciais  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  e  $\frac{\partial v}{\partial y}$  não são contínuas na origem. Por exemplo, se  $(x, y) \neq (0, 0)$  tem-se que

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} & \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{(3x^2 - 3y^2)(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - 3xy^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ & & &= \frac{3(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - 3xy^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ & & &= \frac{3(x^4 - y^4) - 2x(x^2 - 3xy^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ & & &= \frac{x^4 + 6x^2y^2 - 3y^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ & & &= \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 - 4y^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ & & &= 1 + 4y^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Ora, se  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial u}{\partial x}$  existisse, então

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1 + 4y^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} 1 + 4x^2 \frac{x^2 - x^2}{(x^2 + x^2)^2}, & \text{onde } x = y \\ &= \mathbf{1} \\ &= \lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} 1 + 4y^2 \frac{-y^2}{y^4}, & \text{onde } x = 0 \\ &= \mathbf{-3} \end{aligned}$$

que é absurdo.