

Análise Matemática IV

2º semestre de 2000/2001

Exercício-teste 5

Determine a série de Laurent convergente em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ da função

$$f(z) = z \exp\left(\frac{z}{z-1}\right).$$

Aproveite o resultado para calcular

$$\oint_{|z-1|=1} z \exp\left(\frac{z}{z-1}\right) dz,$$

onde a circunferência $|z-1|=1$ é percorrida uma vez no sentido positivo.

Resolução

Temos

$$\begin{aligned} z \exp\left(\frac{z}{z-1}\right) &= z \exp\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) \\ &= ((z-1) + 1) \exp(1) \exp\left(\frac{1}{z-1}\right) \\ &= ((z-1) + 1) e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z-1}\right)^n \\ &= (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e}{n!} (z-1)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e}{n!} (z-1)^{-n} \\ &= \sum_{n=-1}^{+\infty} \frac{e}{(n+1)!} (z-1)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e}{n!} (z-1)^{-n} \\ &= e(z-1) + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\right) e (z-1)^{-n} \\ &= e(z-1) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} (1+n+1) e (z-1)^{-n} \\ &= e(z-1) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{(n+1)!} e (z-1)^{-n} \end{aligned}$$

A série de Laurent pretendida é $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} e (z-1)^{-n+1}$.

Pelo teorema dos resíduos obtemos:

$$\begin{aligned} \oint_{|z-1|=1} z \exp\left(\frac{z}{z-1}\right) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1} \left(z \exp\left(\frac{z}{z-1}\right) \right) \\ &= 2\pi i \left[\frac{n+2}{(n+1)!} e \right]_{n=1} \\ &= 3\pi e i. \end{aligned}$$