Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas
(9ª a 12ª semana)

Cursos: **todos**

1º semestre de 2001/02

Semana 9

79. Resolva os sistemas

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t} \end{pmatrix}$$

Sugestão: Reduza cada sistema a uma equação escalar em apenas uma variável.

80. Determine uma equação diferencial de 2.^{a} ordem que tenha como soluções a família dada:

(a) $y(t) = A\,t + B\,t^2$,

(b) $y(t) = (A + B\,t)\,e^t$.

81. Considere a equação diferencial $y'' - 2y' + 2y = 0$.

(a) Determine a solução geral da equação .

(b) Esboce as soluções que satisfazem $y(0) = 0$.

(c) Reduza a equação a um sistema de primeira ordem.

82. Determine a solução geral das equações diferenciais:

(a) $y'' + y' - 2y = e^t + \cos(t)$

(b) $y'' - 2y' + y = t$

83. Determine a solução geral das equações diferenciais:

(a) $y'' + y = \cos(t)$

(b) $y''' - y'' + y' - 1 = 0$

84. Determine a solução geral das equações diferenciais:

(a) $y''' - 4y' = 8t - 16\text{sen}(2t)$

(b) $y'' - 3y' + 2y = te^{2t}$

85. Considere uma equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes e com a menor ordem possível que admite as soluções t e $\text{sen}(2t)$. Qual a solução geral dessa equação?

86. Resolva os seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''' - 4\pi y'' + 3\pi^2 y' = 10\pi^3 \cos(\pi t)\,, \\ \\ y(0) = 4,\ y'(0) = 4\pi,\ y''(0) = 7\pi^2. \end{cases}$$

87. Resolva os seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' - 3\pi y' + 2\pi^2 y = \pi^2 e^{\pi t}, \\ \\ y(0) = 1,\ y'(0) = \pi. \end{cases}$$

88. Considere a seguinte equação diferencial linear:

$$\left(e^t + 1\right) y'' - y' - \frac{e^{2t}}{e^t + 1} y = 2e^t\ .$$

(a) Verifique que $y = e^t + 1$ e $y = \frac{1}{e^t+1}$ são duas soluções linearmente independentes da equação homogénea associada.

(b) Resolva a equação (não homogénea) com as condições iniciais:

$$y(0) = y'(0) = 0$$

Sugestão: Divida a equação por $e^t + 1$.

Semana 10

89. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = -2\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 \tan y\,, \\ \\ y(1) = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{dy}{dt}(1) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Sugestão: Determine $v(y)$ tal que $\dot{y} = v(y)$.

Determine a solução geral de:

90. $y'' + t\,(y')^2 = 0$.

91. $2t^2 y'' + (y')^3 = 2ty'$.

92. $yy'' + (y')^2 = 0$.

93. $yy'' = 2\,(y')^2$.

Determine os valores de λ para os quais os seguintes problemas de valores fronteira têm soluções não triviais:

94. $y'' - 2y' + (1+\lambda)y = 0; \quad y\,(0) = 0, \quad y\,(1) = 0.$

95. $y'' + \lambda y = 0; \quad y\,(0) = y\,(2\pi)\,, \quad y'\,(0) = y'\,(2\pi)\,.$

96. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,1]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \\ u(0,t) = 0 \ , u(1,t) = \sin 1 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0,1[$).

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = 3\sin(2\pi x) - 7\sin(4\pi x) + \sin(x) \ .$$

97. Determine a solução dos seguinte problema de valore inicial e condição na fronteira (PVIF):

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \ x \in (0,\pi), \ \text{com} \begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \ \sin(x) - 2\ \sin(5x). \end{cases}$$

98. Determine a solução dos seguinte problema de valore inicial e condição na fronteira (PVIF):

$$u_t = u_{xx} - u, \ x \in (0,L), \ \text{com} \begin{cases} u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos(3\pi x/L). \end{cases}$$

Semana 11

99. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ +1 & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

100. Determine a série de Fourier da função $f(x) = x$, no intervalo $]-1,1[$.

101. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

102. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

103. Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal rectificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } \sin x > 0 \\ 0 & \text{se } \sin x \leqslant 0 \end{cases}$$

104. a) Calcule, utilizando o Teorema dos Resíduos, os integrais

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{5 + 4\cos x} dx, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots.$$

b) Deduza, da alínea anterior, os valores de

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{5 + 4\cos x} dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{5 + 4\cos x} dx.$$

c) Diga, justificando, qual o valor da soma da série $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \cos nx$ para cada $x \in [-\pi, \pi]$.

105. a) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. O que pode dizer da paridade da função fog nos seguintes casos:

(1) f par, g impar (2) f impar, g impar (3) f par, g par (4) f impar, g par

b) Mostre que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função ímpar diferenciável, então f' é par. Será que se f' for par, uma sua primitiva é necessariamente ímpar?

106. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = x$ numa série de cosenos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

107. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

108. Seja f a função definida no intervalo $(0, \pi)$ por

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}(2x), & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \quad , & \dfrac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

   (a) Determine a série de senos da função f.

   (b) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ x \in]0, \pi[\\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Semana 12

109. Considere a equação de propagação do calor $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. $\quad (*)$

   (a) Mostre que esta equação possui uma solução estacionária (isto é, que não depende do tempo) da forma $u(x) = Ax + B$.

   (b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0,t) = T_1, \ u(L,t) = T_2$.

   (c) Resolva a equação $(*)$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$ e para as condições iniciais e de fronteira $\begin{cases} u(0,t) = 20 \\ u(1,t) = 60 \\ u(x,0) = 75. \end{cases}$

110. Seja a função f definida no intervalo $(0, \pi)$ por $f(x) = \sin(x)$.

   (a) Determine a série de Fourier de cosenos da função f.

   (b) Diga, justificando, qual o valor da soma da série de Fourier da alínea anterior para cada x no intervalo $[-\pi, \pi]$.

   (c) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, \ x \in]0, \pi[\\ u_x(0,t) = u_x(\pi, t) = 0 \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

111. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ u(0,x) = 0 \ , \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1 \end{cases}$$

para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,1]$, (satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0,1[$) e onde c é um parâmetro real.

112. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \cos(2\pi x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = \cos(2\pi y) \end{cases}$$

para $x, y \in [0,1]$.

113. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,\pi]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0,\pi[$).

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = (\pi - x)x \ .$$

114. Seja f a função definida no intervalo $]0,2\pi[$ por $f(x) = x$.

(a) Determine a série de cosenos da função f.

(b) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, \ x \in (0,2\pi) \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

115. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x,0,t) = x \ , \quad u(x,1,t) = x \\ u(0,y,t) = 0 \ , \quad u(1,y,t) = 1 \\ u(x,y,0) = x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \cos(2\pi\,(x-y)) - \cos(2\pi\,(x+y)) \end{cases}$$

para $x, y \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$.