Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

FICHA 6 – SÉRIES DE FOURIER E MÉTODO DE SEPARAÇÃO DAS VARIÁVEIS

(1) Determine o desenvolvimento em série de Fourier das seguintes funções:
(a) $f(x) = x$ para $x \in [-1, 1]$;
(b) $f(x) = x + 1$ para $x \in [-1, 1]$;
(c) $f(x) = \cos^3 x$ para $x \in [-\pi, \pi]$.

Resolução:
(a) *A série de Fourier de f é da forma*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x))$$

Como $f(x)$ é ímpar, todos os a_k's são 0. Quanto aos b_k's, são dados pela fórmula

$$\begin{aligned}
b_k &= \int_{-1}^{1} x \sin(k\pi x) dx \\
&= 2\int_0^1 x \sin(k\pi x) dx \qquad \textit{porque } x\sin(k\pi x) \textit{ é par} \\
&= 2\left(-\frac{x\cos(k\pi x)}{k\pi}\bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi} dx \right) \\
&= -\frac{2(-1)^k}{k\pi} + 0 \\
&= \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi}
\end{aligned}$$

Conclui-se que o desenvolvimento de Fourier de f para $x \in [-1, 1]$ é

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} \sin(k\pi x)$$

(b) *A função x já foi desenvolvida em série pelo que nos resta desenvolver a função constante igual a 1 no intervalo $[-1, 1]$. Por unicidade do desenvolvimento de Fourier, há uma única escolha possível para a_k's e b_k's tais que*

$$1 = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x))$$

Claramente uma escolha possível é $a_0 = 2$ e $a_k = b_k = 0$ para $k \geq 1$. Por unicidade conclui-se então que o desenvolvimento de Fourier da função constante igual a 1 é

$$1 = \frac{2}{2}$$

e portanto o desenvolvimento de Fourier de f é

$$f(x) = \frac{2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} \sin(k\pi x)$$

(c) *O desenvolvimento de Fourier de f é da forma*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Por unicidade do desenvolvimento de Fourier, qualquer desenvolvimento desta forma que se obtenha será o desenvolvimento de Fourier. Pela fórmula de DeMoivre tem-se:

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^3 &= \cos(3x) + i \sin(3x) \\ \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x + i(3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x) &= \cos(3x) + i \sin(3x) \end{aligned}$$

donde, igualando as partes reais,

$$\begin{aligned} \cos^3 x - 3\cos x(1 - \cos^2 x) &= \cos(3x) \\ 4\cos^3 x &= 3\cos x + \cos(3x) \\ \cos^3 x &= \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos(3x) \end{aligned}$$

Uma vez que este é um desenvolvimento da forma pretendida, conclui-se que é este o desenvolvimento de Fourier. Isto é tem-se $b_k = 0$ para todo o $k \geq 1$, $a_k = 0$ para $k \neq 1, 3$ e $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{1}{4}$.

$\square$

Comentário: *Nas alíneas (b) e (c) do exercício anterior poder-se-ia também ter utilizado as fórmulas integrais para calcular os coeficientes a_k e b_k mas esse processo seria muito mais trabalhoso, principalmente na alínea (c).* $\diamondsuit$

(2) Determine o desenvolvimento em série de senos das seguintes funções:

(a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$;

(b) $f(x) = \cos x$ para $x \in [0, 2\pi]$.

Resolução:

(a) *O desenvolvimento de f em série de senos no intervalo $[0, 2]$ é da forma*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right).$$

Os coeficientes b_k são dados pela fórmula

$$\begin{aligned} b_k &= \int_0^2 f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\, dx \\ &= \int_0^1 x \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\, dx + \int_1^2 \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\, dx \\ &= -\frac{2}{k\pi} x \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\, dx - \frac{2}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\Big|_1^2 \\ &= -\frac{2}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{4}{k^2\pi^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \\ &= \frac{4\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 2k\pi(-1)^k}{k^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Conclui-se que o desenvolvimento de f em série de senos é dado pela expressão

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 2k\pi(-1)^k}{k^2\pi^2} \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right).$$

(b) *O desenvolvimento de f em série de senos no intervalo $[0, 2\pi]$ é da forma*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{kx}{2}\right).$$

Os coeficientes b_k são dados pela fórmula

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\left(\frac{kx}{2}\right)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos x \sin\left(\frac{kx}{2}\right)\, dx. \end{aligned}$$

Para calcular a primitiva anterior pode integrar-se duas vezes por partes e obtém-se

$$\left(1 - \frac{k^2}{4}\right)\int \cos x \sin\left(\frac{kx}{2}\right)\, dx = \sin x \sin\left(\frac{kx}{2}\right) + \frac{k}{2}\cos x \cos\left(\frac{kx}{2}\right).$$

Assim, para $k \neq 2$, tem-se

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4}{4-k^2}\left(\sin x \sin\left(\frac{kx}{2}\right) + \frac{k}{2}\cos x\cos\left(\frac{kx}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi} \\ &= \frac{2((-1)^k - 1)k}{\pi(4-k^2)} \end{aligned}$$

e, para $k = 2$, tem-se

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos x \sin x\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2x)\, dx = 0.$$

Conclui-se que o desenvolvimento de f em série de senos é dado pela expressão

$$f(x) = \sum_{k=1, k\neq 2}^{\infty} \frac{2k((-1)^k - 1)}{\pi(4-k^2)} \sin\left(\frac{kx}{2}\right).$$

□

(3) Determine o desenvolvimento em série de cosenos das seguintes funções:
(a) $f(x) = x^2$ para $x \in [0, 1]$;
(b) $f(x) = e^{2x}$ para $x \in [0, 2\pi]$.

Resolução:

(a) *O desenvolvimento de f em série de cosenos no intervalo $[0, 1]$ é da forma*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x).$$

Os coeficientes a_k são dados pela fórmula

$$a_k = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos(k\pi x)\, dx.$$

Donde

$$a_0 = 2\int_0^1 x^2\, dx = \frac{2}{3},$$

e, para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_k &= 2\int_0^1 x^2\cos(k\pi x)\ dx \\ &= 2\left(x^2\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\Big|_0^1 - \int_0^1 2x\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\ dx\right) \\ &= -\frac{4}{k\pi}\int_0^1 x\sin(k\pi x)\ dx \\ &= -\frac{4}{k\pi}\left(-\frac{x\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\ dx\right) \\ &= \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2}. \end{aligned}$$

Conclui-se que o desenvolvimento de f *em série de cosenos no intervalo* $[0,1]$ *é dado por*

$$f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{\pi^2k^2}\cos(k\pi x).$$

(b) *O desenvolvimento de* f *em série de cosenos no intervalo* $[0, 2\pi]$ *é da forma*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{kx}{2}\right).$$

Os coeficientes a_k *são dados pela fórmula*

$$a_k = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos\left(\frac{kx}{2}\right)\ dx.$$

Donde

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{2x}\ dx = \frac{e^{4\pi}-1}{2\pi},$$

e, para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{2x}\cos\left(\frac{kx}{2}\right)\ dx \\ &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi} e^{2x+i\frac{kx}{2}}\ dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{\left(2+\frac{k}{2}i\right)x}}{2+\frac{k}{2}i}\Big|_0^{2\pi}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{4\pi+k\pi i}-1}{2+\frac{k}{2}i}\right) \\ &= \frac{8\left((-1)^k e^{4\pi}-1\right)}{\pi(16+k^2)}. \end{aligned}$$

Conclui-se que o desenvolvimento de f *em série de cosenos é dado pela expressão*

$$f(x) = \frac{e^{4\pi}-1}{4\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8\left((-1)^k e^{4\pi}-1\right)}{\pi(16+k^2)}\cos\left(\frac{kx}{2}\right).$$

$\square$

(4) Recorrendo ao método de separação de variáveis determine uma solução do seguinte problema de valor na fronteira para a equação do calor:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = \sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(8x) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

para $0 \leq x \leq \pi$ e $t \geq 0$.

Resolução: *Começa-se por procurar soluções da equação diferencial parcial da forma* $u(t,x) = T(t)X(x)$. *Substituindo na equação tem-se*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}\left(T(t)X(x)\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(T(t)X(x)\right) \\ \iff \quad & T'(t)X(x) = T(t)X''(x) \\ \iff \quad & \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \text{ para } T(t), X(x) \neq 0 \\ \iff \quad & \frac{T'(t)}{T(t)} = k = \frac{X''(x)}{X(x)} \text{ para algum } k \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} T'(t) = kT(t) \\ X''(x) = kX(x) \end{cases} \text{ para algum } k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tendo em conta as condições na fronteira

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \iff T(t)X(0) = T(t)X(\pi) = 0$$

$$T(t) = 0 \;\; \forall t \text{ ou } X(0) = X(\pi) = 0,$$

conclui-se que para obter soluções não identicamente nulas tem de ser $X(0) = X(\pi) = 0$. *Por sua vez isto implica que a constante* k *acima tem de ser negativa (se* $k \geq 0$ *a única solução da equação* $X''(x) - kX(x) = 0$ *que verifica* $X(0) = X(\pi) = 0$ *é a solução identicamente nula).*
Portanto

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-k}x) + c_2 \sin(\sqrt{-k}x),$$

e substituindo nas condições fronteira obtém-se

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \sin(\sqrt{-k}\pi) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \text{ ou } \sin(\sqrt{-k}\pi) = 0. \end{cases}$$

Obtêm-se assim soluções não nulas para a equação diferencial para X *e para a condição fronteira quando*

$$\sqrt{-k}\pi = n\pi \iff k = -n^2 \text{ para } n = 1, 2, \ldots$$

e para cada um destes valores de k *obtêm-se como soluções do sistema acima múltiplos reais de*

$$X(x) = \sin(nx) \text{ e } T(t) = e^{-n^2 t}.$$

Isto é, para cada $n = 1, 2, \ldots$ *obtém-se a seguinte solução da equação diferencial parcial satisfazendo a condição na fronteira:*

$$u_n(t,x) = \sin(nx)e^{-n^2 t}.$$

Finalmente, determina-se coeficientes $d_n \in \mathbb{R}$ *tais que a condição inicial seja satisfeita por*

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(t,x).$$

Tem-se

$$
\begin{aligned}
& u(0,x) = \sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(8x) \\
\iff \quad & \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(0,x) = \sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(8x) \\
\iff \quad & \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(nx)\cdot 1 = \sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(8x)
\end{aligned}
$$

portanto $d_3 = 1, d_8 = -\frac{1}{2}$ *e* $d_n = 0$ *para* $n \neq 3, 8$. *Conclui-se que a solução do problema do enunciado é*

$$u(t,x) = \sin(3x)e^{-9t} - \frac{1}{2}\sin(8x)e^{-64t}.$$

$\square$

(5) Seja c um parâmetro real positivo. Recorrendo ao método de separação de variáveis determine uma solução do seguinte problema para a equação das ondas:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = \cos x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \\ u(t,0) = u(t,2\pi) = 1 \end{cases}$$

para $0 \leq x \leq 2\pi$ e $t \geq 0$ (verificando a equação diferencial para $0 < x < 2\pi$).

> **Sugestão:** Comece por determinar uma solução estacionária (isto é da forma $u(t,x) = v(x)$) da equação diferencial que satisfaça as condições na fronteira para $x = 0$ e $x = 2\pi$.
> Pode também aproveitar o resultado da alínea 2(b).

Resolução: *Começa-se por determinar uma solução estacionária da equação diferencial parcial que satisfaz a condição na fronteira. Substituindo* $u(t,x) = v(x)$ *em*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,2\pi) = 1 \end{cases}$$

obtém-se

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(v(x)) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(v(x)) \\ v(0) = v(2\pi) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} v(x) = ax + b \\ v(0) = v(1) = 1 \end{cases} \iff v(x) = 1.$$

Voltando ao problema inicial e escrevendo

$$u(t,x) = v(x) + u_h(t,x) = 1 + u_h(t,x),$$

tem-se que $u_h(t,x)$ *é uma solução do seguinte problema com condições na fronteira homogéneas:*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} \\ u_h(0,x) = \cos x - 1 \\ \frac{\partial u_h}{\partial t}(0,x) = 0 \\ u_h(t,0) = u_h(t,2\pi) = 0 \end{cases}$$

Para resolver este problema, começa-se por procurar soluções da equação diferencial parcial e das condições fronteira da forma $u_h(t,x) = T(t)X(x)$. Substituindo na equação tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(T(t)X(x)\right) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(T(t)X(x)\right) \\ \iff \quad & T''(t)X(x) = c^2 T(t)X''(x) \\ \iff \quad & \frac{T'(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} \text{ para } T(t), X(x) \neq 0 \\ \iff \quad & \frac{T'(t)}{T(t)} = k = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} \text{ para algum } k \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} T'(t) = kT(t) \\ X''(x) = \frac{k}{c^2} X(x) \end{cases} \text{ para algum } k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tendo em conta as condições na fronteira

$$u_h(t,0) = u_h(t,2\pi) = 0 \iff T(t)X(0) = T(t)X(2\pi) = 0$$

$$T(t) = 0 \; \forall t \text{ ou } X(0) = X(2\pi) = 0.$$

conclui-se que para obter soluções não identicamente nulas tem de ser $X(0) = X(2\pi) = 0$. Por sua vez isto implica que a constante k acima tem de ser negativa (se $k \geq 0$ a única solução da equação $X''(x) - \frac{k}{c^2}(X(x) = 0$ que verifica $X(0) = X(2\pi) = 0$ é a solução identicamente nula).
Portanto

$$X(x) = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-k}}{c} x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-k}}{c} x\right),$$

e substituindo nas condições fronteira obtém-se

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(2\pi) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-k}}{c} \cdot 2\pi\right) = 0. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \text{ ou } \sin\left(\frac{\sqrt{-k}}{c} \cdot 2\pi\right) = 0. \end{cases}$$

Obtêm-se assim soluções não nulas para a equação diferencial para X e para a condição fronteira quando

$$2\sqrt{-k}\pi = nc\pi \iff k = -\frac{n^2c^2}{4} \text{ para } n = 1, 2, \ldots$$

e para cada um destes valores de k obtêm-se como soluções da equação para $X(x)$

$$X(x) = c_2 \sin\left(\frac{nx}{2}\right).$$

Quanto à equação para $T(t)$

$$T''(t) = -\frac{n^2c^2}{4} T(t) \iff T(t) = c_3 \cos\left(\frac{nct}{2}\right) + c_4 \sin\left(\frac{nct}{2}\right)$$

No entanto, a condição inicial

$$\frac{\partial u_h}{\partial t}(0,x) = T'(0)X(x) = 0$$

implica, para soluções não identicamente nulas, que seja $T'(0) = 0$, ou seja, $c_4 = 0$. Assim

$$T(t) = c_3 \cos\left(\frac{nct}{2}\right)$$

Isto é, para cada $n = 1, 2, \ldots$ obtém-se a seguinte solução da equação diferencial parcial satisfazendo a condição na fronteira e a condição inicial respeitante à derivada em ordem a t:

$$u_n(t,x) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{nct}{2}\right).$$

Finalmente, determina-se coeficientes $d_n \in \mathbb{R}$ tais que a condição inicial não homogénea seja satisfeita por

$$u_h(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(t,x).$$

Tem-se

$$\begin{aligned} & u_h(0,x) = \cos x - 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(0,x) = \cos x - 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cdot 1 = \cos x - 1. \end{aligned}$$

Portanto os d_n's são os coeficientes do desenvolvimento da função $\cos x - 1$ em série de senos no intervalo $[0, 2\pi]$. Na alínea 2(b) foi já calculado o desenvolvimento de $\cos x$ em série de senos neste intervalo pelo que resta fazer o mesmo para a função constante igual a -1:

$$\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} (-1)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\, dx = \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{2((-1)^n - 1)}{n\pi}$$

donde se conclui

$$-1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n\pi}\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

e portanto, tendo em conta que para n par os coeficientes das séries de senos das funções $\cos x$ e -1 se anulam, tem-se

$$\cos x - 1 = \sum_{n=1, n \text{ ímpar}}^{\infty} -\left(\frac{4n}{\pi(4-n^2)} + \frac{4}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

isto é,

$$d_n = \begin{cases} -\frac{4n}{\pi(4-n^2)} - \frac{4}{n\pi} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ par.} \end{cases}$$

Conclui-se que

$$u_h(t,x) = \sum_{n=1, n \text{ ímpar}}^{\infty} -\left(\frac{4n}{\pi(4-n^2)} + \frac{4}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{nct}{2}\right)$$

e que a solução do problema do enunciado é

$$u(t,x) = 1 + \sum_{n=1, n \text{ ímpar}}^{\infty} -\left(\frac{4n}{\pi(4-n^2)} + \frac{4}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{nct}{2}\right).$$

□

(6) Recorrendo ao método de separação de variáveis determine uma solução para o seguinte problema de valor na fronteira:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \\ u(x,0) = u(x,1) = u(0,y) = 0 \\ u(1,y) = y \end{cases}$$

para $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$ (verificando a equação diferencial para $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$).

Resolução: *Começa-se por procurar soluções da equação diferencial parcial da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Substituindo na equação tem-se*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(X(x)Y(y)\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(X(x)Y(y)\right) = X(x)Y(y) \\ \iff \quad & X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = X(x)Y(y) \\ \iff \quad & \frac{X''(x)}{X(x)} - 1 = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \text{ para } Y(y), X(x) \neq 0 \\ \iff \quad & \frac{X''(x)}{X(x)} - 1 = k = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \text{ para algum } k \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} X''(x) = (k+1)X(x) \\ Y''(y) = -kY(y) \end{cases} \text{ para algum } k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tendo em conta as condições na fronteira

$$u(x,0) = u(x,1) = 0 \iff X(x)Y(0) = X(x)Y(1) = 0$$

$$X(x) = 0 \ \forall x \text{ ou } Y(0) = Y(1) = 0$$

conclui-se que para obter soluções não identicamente nulas tem de ser $Y(0) = Y(1) = 0$. Por sua vez isto implica que a constante k acima tem de ser positiva (se $k \leq 0$ a única solução da equação $Y''(x) + kY(y) = 0$ que verifica $Y(0) = Y(1) = 0$ é a solução identicamente nula).
Portanto

$$Y(y) = c_1 \cos(\sqrt{k}y) + c_2 \sin(\sqrt{k}y)$$

e substituindo nas condições fronteira obtém-se

$$\begin{cases} Y(0) = 0 \\ Y(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \sin(\sqrt{k}) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \text{ ou } \sin(\sqrt{k}) = 0 \end{cases}$$

Obtêm-se assim soluções não nulas para a equação diferencial para X e para a condição fronteira quando

$$\sqrt{k} = n\pi \iff k = n^2\pi^2 \text{ para } n = 1, 2, \ldots$$

e para cada um destes valores de k obtêm-se como soluções da equação para $Y(y)$

$$Y(y) = c_2 \sin(n\pi y)$$

Quanto à equação para $X(x)$

$$\begin{aligned} & X''(x) = (1 + n^2\pi^2)X(x) \\ \iff \quad & X(x) = c_3 \cosh(\sqrt{1+n^2\pi^2}x) + c_4 \sinh(\sqrt{1+n^2\pi^2}x) \end{aligned}$$

No entanto, a condição

$$u(0,y) = X(0)Y(y) = 0$$

implica, para soluções não identicamente nulas, que seja $X(0) = 0$, ou seja, $c_3 = 0$. Assim

$$X(x) = c_4 \sinh(\sqrt{1+n^2\pi^2}x).$$

Isto é, para cada $n = 1, 2, \ldots$ *obtém-se a seguinte solução da equação diferencial parcial satisfazendo as condições na fronteira homogéneas:*

$$u_n(x,y) = \sinh(\sqrt{1+n^2\pi^2}x)\sin(n\pi y)$$

Finalmente, determina-se coeficientes $d_n \in \mathbb{R}$ *tais que a condição na fronteira não homogénea seja satisfeita por*

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(x,y).$$

Tem-se

$$\begin{aligned} & u(1,y) = y \\ \iff \quad & \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(1,y) = y \\ \iff \quad & \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh(\sqrt{1+n^2\pi^2})\sin(n\pi y) = y. \end{aligned}$$

Portanto $d_n \sinh(\sqrt{1+n^2\pi^2})$ *são os coeficientes do desenvolvimento de* y *em série de senos no intervalo* $[0,1]$. *Donde,*

$$d_n \sinh(\sqrt{1+n^2\pi^2}) = \frac{2}{1}\int_0^1 y\sin(n\pi y)\ dy = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

e portanto

$$d_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi\sinh(\sqrt{1+n^2\pi^2})}.$$

Conclui-se que a solução do problema do enunciado é

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi\sinh(\sqrt{1+n^2\pi^2})}\sinh(\sqrt{1+n^2\pi^2}x)\sin(n\pi y).$$

□