Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV - CIVIL

EXAME 1 - 26 DE JUNHO DE 2000 - DAS 9H ÀS 12H
TESTE 2 - PERGUNTAS 7 A 12 - DAS 9 ÀS 10H30

Apresente e justifique todos os cálculos

(1) (1) Determine o conjunto dos pontos $z \in \mathbb{C}$ onde $f(z) = \overline{z}^2 - 2z$ é diferenciável.

(1.5) (2) Determine e classifique as singularidades da função definida por

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right) + \frac{1}{z}.$$

Desenvolva $f(z)$ em série de Laurent na região $|z-1| > 1$.

(3) Seja γ a circunferência de raio 1 centrada na origem, orientada no sentido positivo.

(1.5) (a) Calcule o integral

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2 + 6z + 1}\, dz.$$

(1.5) (b) Calcule o integral real

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \cos\theta}\, d\theta.$$

(1) (4) (a) A equação diferencial

$$3t^3 y + y^2 t^2 + (t^4 + t^3 y)\frac{dy}{dt} = 0$$

admite um factor de integração da forma $\mu = \mu(t)$ (com $\mu(t) \neq 0$, $\forall t \neq 0$). Determine-o.

(1.5) (b) Determine a solução da equação da alínea anterior que satisfaz a condição inicial $y(1) = 2$. Indique o intervalo de definição desta solução.

(1) (5) Mostre que o seguinte problema de valor inicial

$$\sin(ty) + \left(e^{ty} - 1\right)\frac{dy}{dt} = 0, \quad y(0) = 0$$

tem mais de uma solução.

(1) (6) Seja γ a circunferência de raio 1 centrada na origem e orientada no sentido positivo. Seja $g(z)$ uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$. Suponha ainda que $2i$ é uma singularidade não removível de $g(z)$. Determine o conjunto dos pontos onde

$$f(z) = \int_\gamma g(zw)\, dw$$

é analítica.

(7) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1.5) (a) Calcule e^{At}.

(1.5) (b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(1.5) (8) Utilizando o método dos coeficientes indeterminados, determine a solução geral de

$$y^{(2)} + y = \cos(2t) + e^t.$$

(9) Considere a função $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}.$$

(1) (a) Ache o desenvolvimento em série de cosenos de f.

(1.5) (b) Determine as soluções (satisfazendo a equação diferencial para $0 < x < \pi$ e $0 < y < \frac{\pi}{2}$) do seguinte problema de Neumann para a equação de Laplace:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, \frac{\pi}{2}) = f(x). \end{cases}$$

(1) (10) Utilizando a transformada de Laplace, resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{y} - y = f(t) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{onde} \quad f(t) = \begin{cases} -2\sin t, & \text{se } 0 \leq t \leq 2\pi \text{ ou } 4\pi \leq t \leq 6\pi \\ 0, & \text{caso contrário}. \end{cases}$$

(1) (11) Considere a função $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = H(x - \frac{1}{2})$ (onde H designa a função de Heaviside). Sabendo que o desenvolvimento em série de senos de g é

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \cos(k\pi)\right)}{k\pi} \sin(k\pi x),$$

calcule a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

(1) (12) Sejam y_1 uma solução arbitrária da equação $\dot{y} - 10y = 0$, y_2 uma solução arbitrária da equação $\ddot{y} + 100y = 0$ e y_3 uma solução arbitrária da equação $y^{(1000)} = 0$. Exiba uma equação diferencial ordinária (não trivial) linear homogénea com coeficientes constantes e de ordem mínima que inclua o produto $y_1 y_2 y_3$ entre as suas soluções.

Respostas (omitindo algumas justificações):

(1) Em termos de partes real e imaginária, tem-se $f(x+iy) = (x^2-y^2-2x)+i(-2xy-2y)$. Como as partes real e imaginária são continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$, as equações de Cauchy-Riemann são necessárias e suficientes para a diferenciabilidade. Ora,

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2-2x) = 2x-2 = \frac{\partial}{\partial y}(-2xy-2y) = -2x-2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x=0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2-2x) = -2y = -\frac{\partial}{\partial x}(-2xy-2y) = 2y \qquad \Longleftrightarrow \qquad y=0\ .$$

Assim, f é diferenciável na origem e só aí.

(2) A função $g(z)$ tem um pólo simples em $z=0$ porque $\lim_{z\to 0}[zg(z)]=1$ existe não nulo, e tem uma singularidade essencial em $z=1$ porque $\lim_{z\to 1}[(z-1)g(z)]$ não existe, $\forall n=0,1,2,\ldots$. Pela série de Taylor da função seno, para qualquer $z\neq 1$, tem-se $\sin\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{2(2k+1)}}$. Pela soma da série geométrica, para $|z-1|>1$, tem-se $\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} = \frac{\frac{1}{z-1}}{1+\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^n}$. O desenvolvimento pedido é a soma destes dois:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{2(2k+1)}} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+1}}\ .$$

(3) (a) As singularidades de $\frac{1}{z^2+6z+1}$ são $z_1=-3+2\sqrt{2}$ e $z_2=-3-2\sqrt{2}$, ambas pólos simples. A única singularidade na região limitada por γ é z_1. Pelo teorema dos resíduos,

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2+6z+1}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{z_1}\frac{1}{z^2+6z+1} = 2\pi i\lim_{z\to z_1}\frac{1}{2z+6} = 2\pi i\frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi i}{2\sqrt{2}}\ .$$

(b) Traduzindo o integral num integral no plano complexo (com $z=e^{i\theta}$), obtém-se

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{3+\cos\theta}\,d\theta = \int_\gamma \frac{1}{3+\frac{z+z^{-1}}{2}}\cdot\frac{1}{iz}\,dz = \frac{1}{i}\int_\gamma\frac{2}{6+z^2+1}\,dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\ ,$$

onde se usou o resultado da alínea anterior.

(4) (a) $\mu(t)$ é factor de integração da equação dada se e só se $M+N\frac{dy}{dt}=0$ é exacta, onde $M(t,y) = (3t^3y+t^2y^2)\mu(t)$ e $N(t,y)=(t^4+t^3y)\mu(t)$. Uma condição necessária (para $t^4+t^3y\neq 0$) é

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \iff (3t^3+2t^2y)\mu = (4t^3+3t^2y)\mu + (t^4+t^3y)\dot\mu\ .$$

Como se procura $\mu\neq 0$, fica

$$\frac{\dot\mu}{\mu} = \frac{-t^3-t^2y}{t^4+t^3y} = -\frac{1}{t} \iff \ln|\mu| = -\ln|t|+c \iff \mu(t)=\frac{k}{t}\ .$$

Toma-se, por exemplo, $\mu(t)=\frac{1}{t}$, $\forall t\neq 0$.

(b) De acordo com a alínea anterior, dividindo a equação dada por t obtém-se uma equação exacta, cuja solução é dada implicitamente por $F(t,y)=$ const. onde

$$F(t,y) = \left\{\begin{array}{l}\int(3t^2y+ty^2)\,dt+f(y)\\ \int(t^3+t^2y)\,dy+g(t)\end{array}\right\} = t^3y+\frac{1}{2}t^2y^2+c\ , \qquad \text{com } c\in\mathbb{R}\ .$$

De maneira a satisfazer a condição inicial, a solução é dada (para $t\neq 0$) por

$$t^3y+\frac{1}{2}t^2y^2 = 4 \iff y^2+2ty-\frac{8}{t^2} = 0 \iff y = -t\pm\sqrt{t^2+\frac{8}{t^2}}\ .$$

Para satisfazer a condição inicial, tem que ser $y(t) = -t+\sqrt{t^2+\frac{8}{t^2}}$, $\forall t>0$.

(5) A função $y(t)=0$, $\forall t\in\mathbb{R}$ é uma solução. Por outro lado, para $ty\neq 0$ tem-se

$$\sin(ty)+\left(1-e^{ty}\right)\frac{dy}{dt} = 0 \iff \frac{dy}{dt} = \frac{\sin(ty)}{e^{ty}-1} = \frac{ty-\frac{1}{3}(ty)^3+\ldots}{ty+\frac{1}{2}(ty)^2+\ldots} = \frac{1-\frac{1}{3}(ty)^2+\ldots}{1+\frac{1}{2}ty+\ldots} \neq 0\ .$$

Pelo teorema de Picard, existe uma única solução de $\frac{dy}{dt} = \frac{1-\frac{1}{3}(ty)^2+\ldots}{1+\frac{1}{2}ty+\ldots}$ com $y(0)=0$. Como o membro direito desta EDO é não nulo, esta solução não é a solução identicamente nula.

(6) Se $zw=2i$ para algum $w\in\gamma$, isto é, se $|z|=2$, a função $f(z)$ não está definida (como a singularidade é não removível, o integral ao longo de γ não existe). Se $|z|\neq 2$ podemos aplicar a regra de Leibniz para concluir que f é diferenciável e

$$f'(z) = \int_\gamma wg(zw)\,dz.$$

Uma vez que f é diferenciável em todos os pontos do conjunto aberto $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|\neq 2\}$, conclui-se que é analítica em U.

Continuação das respostas (omitindo algumas justificações):

(7) (a) Uma decomposição de Jordan de A é $A = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ i & -i \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}}$. Logo,

$$e^{At} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ i & -i \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{2it} & 0 \\ 0 & e^{-2it} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} = \begin{bmatrix} \cos 2t & 2\sin 2t \\ -\frac{\sin 2t}{2} & \cos 2t \end{bmatrix}.$$

(b) A solução é dada, por exemplo, pela fórmula de variação das constantes:

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{A(t-s)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

(8) As raízes do polinómio característico, $\lambda^2 + 1$, são i e $-i$, pelo que a solução geral (real) da equação homogénea associada é $y_H(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$. Pelo método dos coeficientes indeterminados, sabe-se que existe uma solução particular $y_P(t)$ da forma $c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t + c_5 e^t$. Substituindo esta expressão na equação, determina-se c_3, c_4, c_5 e obtém-se $y_P(t) = -\frac{1}{3}\cos 2t + \frac{1}{2}e^t$. A solução geral é pois

$$y_H(t) + y_P(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{3}\cos 2t + \frac{1}{2}e^t , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

(9) (a) Os coeficientes do desenvolvimento de f em série de co-senos no intervalo $[0, \pi]$ são dados por

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nx \, dx \right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ (-1)^k \frac{2}{2k+1} & \text{se } n = 2k+1 \text{ é ímpar} . \end{cases}$$

Logo, a série de co-senos de f no intervalo $[0, \pi]$ é $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{2}{2k+1} \cos(2k+1)x$.

(b) Primeiro calcula-se as soluções (não triviais) da EDP da forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Verifica-se que os factores $X(x)$ e $Y(y)$ devem satisfazer as equações $X^{(2)}(x) = kX(x)$ e $Y^{(2)}(y) = -kY(y)$ onde $k \in \mathbb{R}$. Depois, ao impôr às soluções deste tipo as condições na fronteira da variável x, conclui-se que só há soluções não identicamente nulas quando $k = -n^2$ onde $n = 0, 1, 2, \ldots$, que $X(x)$ deve ser múltiplo de $\cos nx$ e que $Y(y)$ deve ser combinação linear de $\cosh ny$ e de $\sinh ny$. A condição em $y = 0$ impõe que os termos com $\sinh ny$ não ocorram, pelo que a solução será da forma $u(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos nx \cosh ny$. A condição em $y = \frac{\pi}{2}$ impõe que os c_n's satisfaçam

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(nx) \cdot n \sinh(n\frac{\pi}{2}) = f(x) .$$

Comparando com a alínea anterior, $c_n \cdot n \sinh(n\frac{\pi}{2}) = a_n$, $n > 0$, e $c_0 \in \mathbb{R}$, portanto a solução é

$$u(x, y) = c + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)^2 \sinh(\frac{(2k+1)\pi}{2})} \cos[(2k+1)x] \cosh[(2k+1)y] , \qquad \text{onde } c \in \mathbb{R}.$$

(10) Seja $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, onde $y(t)$ é a solução do PVI. Tem-se $g(t) = -2\sin t(1 - H_{2\pi}(t) + H_{4\pi}(t) - H_{6\pi}(t))$. Aplica-se a transformada de Laplace a ambos os membros da equação:

$$(s-1)Y(s) - y(0) = -\frac{2}{s^2+1}\left(1 - e^{-2\pi s} + e^{-4\pi s} - e^{-6\pi s}\right)$$

$$\iff \quad Y(s) = \left(\frac{s+1}{s^2+1} - \frac{1}{s-1} \right) \left(1 - e^{-2\pi s} + e^{-4\pi s} - e^{-6\pi s}\right) .$$

A função contínua com esta transformada de Laplace e definida para $t \geq 0$ é

$$y(t) = (\cos t + \sin t)(1 - H_{2\pi}(t) + H_{4\pi}(t) - H_{6\pi}(t)) - e^t(1 - e^{-2\pi} H_{2\pi}(t) + e^{-4\pi} H_{4\pi}(t) - e^{-6\pi} H_{6\pi}(t)) .$$

(11) O desenvolvimento de h em série de senos converge em $x = \frac{1}{2}$ para $\frac{1}{2}(\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} + \lim_{x\to\frac{1}{2}^-}) = \frac{1}{2}$. Como as parcelas do somatório correspondentes a n par anulam-se em $x = \frac{1}{2}$, fica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)}{n\pi} \sin(\frac{n\pi}{2}) = \frac{1}{2} \quad \iff \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) - \cos((2k+1)\pi)\right)}{(2k+1)\pi}(-1)^k = \frac{1}{2}$$

$$\iff \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi}(-1)^k = \frac{1}{2} \quad \iff \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} .$$

(12) Como $y_1(t) = c_1 e^{10t}$, $y_2(t) = c_2 \cos 10t + c_3 \sin 10t$ e $y_3(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{999} t^{999}$, para certos $c_1, c_2, c_3, a_0, \ldots, a_{999} \in \mathbb{R}$, a função $y_1 y_2 y_3$ é da forma

$$\left(a_0 + a_1 t + \ldots + a_{999} t^{999}\right) \left(b_1 e^{10t} \cos 10t + b_2 e^{10t} \sin 10t\right) ,$$

pelo que $y_1 y_2 y_3$ é solução da equação

$$\left((D-10)^2 + 100\right)^{1000} y = 0 .$$