Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV - CIVIL

TESTE 1 - 6 DE MAIO DE 2000 - DAS 11H ÀS 12:30H

RESOLUÇÃO

(1) Seja $u(x,y) = e^{2x}\cos 2y$. Determine $v(x,y)$ tal que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ seja analítica em $\mathbb{C}$ e calcule $f'(1+\frac{i\pi}{4})$.

Resolução: *Uma vez que* $e^{a+bi} = e^a\cos b + ie^a \sin b$, *a função* $u(x,y)$ *é a parte real de* $f(z) = e^{2z}$, *que é uma função analítica em* $\mathbb{C}$. *Portanto pode-se tomar*

$$v(x,y) = \operatorname{Im} e^{2z} = e^{2x}\sin 2y$$

Como

$$\frac{d}{dz}\left(e^{2z}\right) = 2e^{2z}$$

conclui-se que

$$f'(1+\frac{i\pi}{4}) = 2e^{2+\frac{i\pi}{2}} = 2e^2 i.$$

$\square$

Comentário: *Alternativamente podia ter-se determinado* v *usando as equações de Cauchy-Riemann e calculado* $f'(1+\frac{i\pi}{4})$ *por meio da fórmula*

$$f'(1+\frac{i\pi}{4}) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,\frac{\pi}{4}) + i\frac{\partial v}{\partial x}(1,\frac{\pi}{4})$$

$\diamondsuit$

(2) Seja f a função definida por

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} + \frac{1}{2-z}$$

(a) Determine e classifique as singularidades de f.
(b) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent válido para $|z| > 2$.

Resolução:
(a) *As singularidades de* $f(z)$ *são* $z = 0$ *e* $z = 2$. *Para todo o* $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *tem-se*

$$\begin{aligned}\frac{e^z-1}{z} &= \frac{1+z+\frac{z^2}{2}+\ldots-1}{z}\\ &= 1+\frac{z}{2}+\ldots\end{aligned}$$

portanto $\frac{e^z-1}{z}$ *tem uma singularidade removível em* $z = 0$. *Uma vez que* $\frac{1}{2-z}$ *é analítica numa vizinhança de* $z = 0$ *conclui-se que* $z = 0$ *é uma singularidade removível.*
Por outro lado, a função $\frac{e^z-1}{z}$ *é analítica numa vizinhança de* $z = 2$ *e a função* $\frac{1}{2-z}$ *tem um pólo simples em* $z = 2$ *(*$\frac{1}{2-z}$ *já se encontra desenvolvida em potências de* $(z-2)$*!). Conclui-se que* $z = 2$ *é um pólo simples de* $f(z)$.
Comentário: Alternativamente podia ter-se calculado os limites

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z-1}{z} + \frac{1}{2-z}\right) = \frac{3}{2}$$

Date: 7 de Maio de 2000.

e

$$\lim_{z\to 2}(z-2)\left(\frac{e^z-1}{z}+\frac{1}{2-z}\right)=-1$$

que mostram igualmente que 0 é uma singularidade removível e que 2 é um pólo simples. $\diamondsuit$

(b) *Tem-se para todo o $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$,*

$$\begin{aligned}\frac{e^z-1}{z} &= \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1\right)\\ &= \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-z} &= \frac{\frac{1}{z}}{\frac{2}{z}-1} && \textit{para } z\neq 0\\ &= -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} && \textit{para } z\neq 0\\ &= -\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n && \textit{para } z\neq 0 \textit{ e } \left|\frac{2}{z}\right|<1\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}-\frac{2^n}{z^{n+1}} && \textit{para } |z|>2\end{aligned}$$

Juntando ambos os desenvolvimentos obtém-se o desenvolvimento de Laurent de f na região pretendida:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{2^n}{z^{n+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!} \textit{ para } |z|>2.$$

$\square$

(3) Seja γ_R a curva fechada simples dada pela fronteira do semicírculo

$$D_R=\{z=\rho e^{i\theta}: 0\le\rho\le R, 0\le\theta\le\pi\}$$

de raio $R>1$ e percorrida no sentido positivo.

(a) Calcule o integral

$$\int_{\gamma_R}\frac{z^2}{(z^2+1)^2}dz.$$

(b) Calcule o integral real

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx.$$

Resolução:

(a) *As singularidades de* $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$ *são os zeros do denominador.*

$$z^2+1=0 \iff z=\pm i$$

A única singularidade no interior de γ_R *é* $z=i$*. Tem-se*

$$\frac{z^2}{(z^2+1)^2}=\frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2}=\frac{1}{(z-i)^2}\cdot\frac{z^2}{(z+i)^2}$$

Uma vez que $g(z)=\frac{z^2}{(z+i)^2}$ *é uma função analítica numa vizinhança de* $z=i$ *conclui-se que o desenvolvimento de Laurent de* $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$ *numa vizinhança de* $z=i$ *é da forma*

$$\frac{a_{-2}}{(z-i)^2}+\frac{a_{-1}}{z-i}+\dots$$

onde $a_{-2}=g(i)$ *e* $a_{-1}=g'(i)$ *são os dois primeiros coeficientes do desenvolvimento de Taylor de* $g(z)$ *no ponto* $z=i$*. Como* $g(i)=\frac{1}{4}$ *e*

$$\begin{aligned} g'(i) &= \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z+i)^2}\right)\Bigg|_{z=i} \\ &= \frac{2z(z+i)^2-2z^2(z+i)}{(z+i)^4}\Bigg|_{z=i} \\ &= \frac{8i^3-4i^3}{16i^4} \\ &= -\frac{i}{4} \end{aligned}$$

conclui-se que $z=i$ *é um pólo de ordem 2 e que*

$$\operatorname{Res}_{z=i}\frac{z^2}{(z^2+1)^2}=\frac{-i}{4}$$

Pelo teorema dos resíduos,

$$\int_{\gamma_R}\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,dz=2\pi i\frac{-i}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Comentário: Alternativamente poder-se-ia ter classificado a singularidade e calculado o resíduo calculando os limites (por meio da regra de Cauchy)

$$\lim_{z\to i}(z-i)^2\frac{z^2}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{4}$$

e

$$\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left((z-i)^2\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\right)=-\frac{i}{4}.$$

$\diamondsuit$

(b) *Como a função integranda é par tem-se*

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx \end{aligned}$$

Seja Γ_R a porção de γ_R parametrizada por $z(\theta) = Re^{i\theta}$ com $0 \le \theta \le \pi$. Usando a alínea anterior tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\, dz &= \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\, dz \\
\frac{\pi}{2} &= \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\, dz \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Observa-se agora que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\, dz \right| &\le \int_{\Gamma_R} \left| \frac{z^2}{(z^2+1)^2} \right| ds \\
&\le \int_{\Gamma_R} \frac{|z^2|}{(|z^2|-1)^2}\, ds \\
&= \int_{\Gamma_R} \frac{R^2}{(R^2-1)^2} ds \\
&= \frac{\pi R^3}{(R^2-1)^2}
\end{aligned}$$

tende para 0 quando R tende para infinito. Tomando o limite quando $R \to \infty$ na equação $(\star)$, conclui-se

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

$\square$

(4) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} + 2ty = e^{-t^2}.$$

Resolução: *Trata-se de uma equação linear. Multiplicando pelo factor de integração e^{t^2} tem-se*

$$\begin{aligned}
& \frac{dy}{dt} + 2ty = e^{-t^2} \\
\iff\quad & \frac{d}{dt}\left(e^{t^2} y(t)\right) = 1 \\
\iff\quad & e^{t^2} y(t) = t + C \quad , \ C \in \mathbb{R} \\
\iff\quad & y(t) = (t + C)e^{-t^2} \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

O intervalo de definição de todas as soluções é $\mathbb{R}$. $\square$

(5) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$2y^2 - 9ty + (2ty - 3t^2)\frac{dy}{dt} = 0 \quad , \quad y(1) = 3.$$

Resolução: *Sejam* $M(t,y) = 2y^2 - 9ty$ *e* $N(t,y) = 2ty - 3t^2$. *Tem-se*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y - 9t \neq 2y - 6t = \frac{\partial N}{\partial t}$$

portanto a equação não é exacta. Para que exista um factor de integração $\mu = \mu(t)$ *tem de se verificar*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(t)(2y^2 - 9ty)\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu(t)(2ty - 3t^2)\right)\\
\mu(t)(4y - 9t) &= \mu'(t)(2ty - 3t^2) + \mu(t)(2y - 6t)\\
\mu'(t)(2ty - 3t^2) &= \mu(t)(2y - 3t)\\
\mu'(t)t(2y - 3t) &= \mu(t)(2y - 3t)\\
\mu'(t) &= \frac{1}{t}\mu(t)
\end{aligned}$$

Logo podemos tomar, por exemplo $\mu(t) = t$ *para factor de integração. Para* $t \neq 0$ *obtemos a equação equivalente*

$$2ty^2 - 9t^2y + (2t^2y - 3t^3)\frac{dy}{dt} = 0$$

que é exacta. Um potencial $\phi(t,y)$ *acha-se resolvendo o sistema*

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 2ty^2 - 9t^2y \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2t^2y - 3t^3 \end{cases} \iff \begin{cases} \phi(t,y) = t^2y^2 - 3t^3y + A(y) \\ \phi(t,y) = t^2y^2 - 3t^3y + B(t) \end{cases}$$

Assim, pode-se tomar para potencial,

$$\phi(t,y) = t^2y^2 - 3t^3y$$

A solução do problema de valor inicial é dada por

$$t^2y^2 - 3t^3y = 1^23^2 - 31^33 = 0$$

Tem-se

$$\begin{aligned}
& t^2y^2 - 3t^3y = 0\\
\iff\ & t^2y(y - 3t) = 0\\
\iff\ & t = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } y = 3t
\end{aligned}$$

Numa vizinhança da condição inicial a única destas possibilidades que se verifica é $y = 3t$. *Conclui-se que a solução do problema de valor inicial é*

$$y = 3t$$

□

(6) Determine se o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = e^y + |\sin y| \quad , \quad y(1) = 0.$$

tem uma única solução.

Resolução: *Considere-se a função* $f(t,y) = e^y + |\sin y|$ *definida em* $\mathbb{R}^2$. *Vamos provar que esta função é localmente Lipschitziana. Dado um conjunto compacto* K *contido em* $\mathbb{R}^2$*, pelo teorema de Lagrange*

$$|e^{y_2} - e^{y_1}| \leq C|y_2 - y_1|$$

onde C é o supremo da derivada de e^y em K. Por outro lado

$$\begin{aligned} \big|\, |\sin y_2| - |\sin y_1| \,\big| &\leq |\sin y_2 - \sin y_1| \\ &\leq \sup_{(t,y)\in K} |\cos y|\, |y_2 - y_1| \\ &\leq |y_2 - y_1| \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} |f(t,y_2) - f(t,y_1)| &= |e^{y_2} - e^{y_1} + (\sin y_2 - \sin y_1)| \\ &\leq C|y_2 - y_1| + |y_2 - y_1| \\ &= (C+1)|y_2 - y_1| \end{aligned}$$

o que prova que $f(t,y)$ é localmente Lipschitziana. Então pelo teorema de Picard a solução deste problema de valor inicial existe e é única.

□

Comentário: *A função $f(t,y)$ não é de classe C^1 porque não é diferenciável nos pontos onde $\sin y$ muda de sinal. No entanto, nesses pontos as derivadas laterais são finitas e portanto a função é localmente Lipschitziana.* ♢

(7) Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica tal que

- $\lim_{z\to\infty} f(z)$ existe e é finito,
- $\oint_\gamma \frac{f(z)}{\sin^2 z}\, dz = 1$ onde γ é a circunferência de raio 1 centrada na origem orientada no sentido positivo.

Mostre que a singularidade de $f(z)$ em $z = 0$ não é removível.

Resolução: *Suponhamos que 0 é uma singularidade removível. Então existe uma função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que é analítica e igual a $f(z)$ para $z \neq 0$.*

Uma vez que

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = \lim_{z\to\infty} f(z) \text{ é finito}$$

conclui-se que g é limitada em $\mathbb{C}$ e portanto, pelo teorema de Liouville, $g(z)$ é constante. Conclui-se que $f(z)$ é constante. Seja $C = f(z)$. Então por hipótese temos,

$$1 = \oint_\gamma \frac{f(z)}{\sin^2 z}\, dz = \oint_\gamma \frac{C}{\sin^2 z}\, dz$$

A única singularidade de $\frac{C}{\sin^2 z}$ no interior de γ é $z = 0$.

$$\lim_{z\to 0} z^2 \frac{1}{\sin^2 z} = \left(\lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin z}\right)^2 = 1$$

pelo que se trata de um pólo duplo. Tem-se

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{\sin^2 z} = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{\sin^2 z}\right) = 0$$

portanto pelo teorema dos resíduos obtém-se

$$1 = C 2\pi i 0 = 0$$

o que é falso. Conclui-se que a singularidade de $f(z)$ não pode ser removível conforme pretendíamos demonstrar. □