Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

CIVIL

2º TESTE PARA PRATICAR (DURAÇÃO: 1H30)

apresente e justifique todos os cálculos

(1) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

(3) (a) Calcule e^{At}.

(3) (b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

(3) (2) Utilizando o método dos coeficientes indeterminados, calcule a solução geral de

$$y^{(3)} - y^{(2)} + 4\dot{y} - 4y = e^t$$

e determine a solução particular que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 0 \ , \qquad \dot{y}(0) = \frac{1}{5} \qquad \text{e} \qquad y^{(2)}(0) = \frac{2}{5} .$$

(5) (3) Seja c um parâmetro real positivo. Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine a solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1. \end{cases}$$

(2) (4) Utilizando a transformada de Laplace, resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^{(2)} - 4\dot{y} + 4y = f(t) \\ y(0) = 0 \ , \quad \dot{y}(0) = 2 \ , \end{cases} \qquad \text{onde} \ \ f(t) = \begin{cases} te^{2t} \ , & \text{se } 0 \le t \le 1 \\ te^{2t} + (t-1)e^{2(t-1)} \ , & \text{se } t \ge 1 \ . \end{cases}$$

(2) (5) Mostre que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} .$$

Sugestão: Considere a função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$ para $x \in [0,1]$ e $f(x) = -1$ para $x \in [-1,0[$.

(2) (6) Seja $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ a transformada de Laplace de $f(t)$, $t \ge 0$. Suponha que $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existe e é finito. Prove que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(u)\, du .$$

Date: 8 de Junho de 2000.

Respostas (omitindo algumas justificações):

(1) (a) Uma decomposição de Jordan de A é $A = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{S^{-1}}$. Logo,

$$e^{At} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} = e^{3t} \begin{bmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{bmatrix}.$$

(b) A solução é dada, por exemplo, pela fórmula de variação das constantes:

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{A(t-s)} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3s} \end{bmatrix} ds = e^{3t} \begin{bmatrix} 1+2t+2t^2 \\ -t^2 \end{bmatrix} .$$

(2) As raízes do polinómio característico, $\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4)$, são 1, $2i$ e $-2i$, pelo que a solução geral (real) da equação homogénea associada é $y_H(t) = c_1 e^t + c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t$. Pelo método dos coeficientes indeterminados, sabe-se que existe uma solução particular $y_P(t)$ da forma cte^t. Substituindo cte^t na equação, determina-se c e obtém-se $y_P(t) = \frac{1}{5} te^t$. A solução geral é pois

$$y_H(t) + y_P(t) = c_1 e^t + c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t + \frac{1}{5} te^t \ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \ .$$

A solução particular que satisfaz as condições iniciais dadas é $y(t) = \frac{1}{5} te^t$.

(3) Primeiro calcula-se as soluções (não triviais) da EDP da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Verifica-se que os factores $T(t)$ e $X(x)$ devem satisfazer as equações $T^{(2)}(t) = kT(t)$ e $X^{(2)}(x) = \frac{k}{c^2} X(x)$ onde $k \in \mathbb{R}$. Depois, ao impôr a condição na fronteira $T(t)X(0) = T(t)X(1) = 0$, conclui-se que só há soluções não identicamente nulas quando $k = -n^2 c^2 \pi^2$ onde $n = 1, 2, \ldots$ e $X(x) = c_1 \sin \frac{\sqrt{-k}}{c} x$. Impondo $u(0,x) = T(0)X(x) = 0$ obtém-se ainda que $T(t) = c_2 \sin cn\pi t$. Assim, para cada $n = 1, 2, \ldots$, tem-se uma solução da equação diferencial satisfazendo as condições na fronteira e a condição $u(x,0) = 0$:

$$u_n(t,x) = \sin(cn\pi t) \sin(n\pi x).$$

Procura-se uma solução da restante condição inicial da forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(t,x).$$

Impondo $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1$, conclui-se que deve ser $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n cn\pi \sin n\pi x = 1$. O desenvolvimento de 1 em série de senos no intervalo $[0,1]$ é $1 = \sum_{n=1, n \text{ ímpar}}^{+\infty} \frac{4}{n\pi} \sin n\pi x$, logo toma-se $d_n = \frac{4}{cn^2\pi^2}$ quando o n é ímpar e $d_n = 0$ quando o n é par. A solução procurada é

$$u(t,x) = \sum_{n=1, n \text{ ímpar}}^{+\infty} \frac{4}{cn^2\pi^2} \sin cn\pi t \sin n\pi x \ .$$

(4) Seja $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, onde $y(t)$ é a solução do PVI. Como $f(t) = te^{2t} + H_1(t)(t-1)e^{2(t-1)}$, tem-se que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{e^{-s}}{(s-2)^2}$. Aplica-se a transformada de Laplace a ambos os membros da equação:

$$\begin{aligned} & s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) - 4(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) = \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{e^{-s}}{(s-2)^2} \\ \iff \quad & (s^2 - 4s + 4)Y(s) = 2 + \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{e^{-s}}{(s-2)^2} \\ \iff \quad & Y(s) = \frac{2}{(s-2)^2} + \frac{1}{(s-2)^4} + \frac{e^{-s}}{(s-2)^4} \ . \end{aligned}$$

A função contínua com esta transformada de Laplace é

$$y(t) = 2te^{2t} + \frac{t^3}{3!} e^{2t} + H_1(t) \frac{(t-1)^3}{3!} e^{2(t-1)} \ .$$

(5) A série de Fourier de f é $\sum_{n=1, n \text{ ímpar}}^{+\infty} \frac{4}{n\pi} \sin n\pi x$ (como foi calculado no exercício (3b)). Pela fórmula de Parseval,

$$\sum_{n=1, n \text{ ímpar}}^{+\infty} \left(\frac{4}{n\pi} \right)^2 = \int_{-1}^{1} 1 \, dx \iff \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 2 \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \ .$$

(6) Por definição de transformada de Laplace, o membro esquerdo da fórmula a demonstrar é

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} \, dt \ .$$

O membro direito da fórmula a demonstrar é

$$\int_s^{+\infty} F(u) \, du = \int_s^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-ut} \, dt \, du = \int_0^{+\infty} f(t) \int_s^{+\infty} e^{-ut} \, du \, dt = \int_0^{+\infty} f(t) \frac{e^{-st}}{t} \, dt \ ,$$

onde na segunda igualdade se aplicou o teorema de Fubini e na terceira igualdade se integrou em u.