Análise Matemática IV
1º semestre de 2001/2002

Exercício-teste 10

Resolva o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + e^{-8t} \\ \\ y_2' = -64y_1 - 16y_2 - 8e^{-8t} \end{cases}$$

com a seguinte condição inicial:

$$y_1(1) = 1 \ \text{ e } \ y_2(1) = -8.$$

Resolução

O sistema pode ser posto na seguinte forma matricial:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{t})$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -64 & -16 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{h}(\mathbf{t}) = e^{-8t}\begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$:

A matriz $\mathbf{A}$ só tem um valor próprio (com multiplicidade algébrica igual a 2):

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 &\Leftrightarrow \lambda(16+\lambda) + 64 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + 16\lambda + 64 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda+8)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = -8. \end{aligned}$$

Um vector próprio $\mathbf{u}$ associado a $\lambda = -8$ é uma solução da equação

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + 8\mathbf{I})\,\mathbf{u} = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -64 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 8u_1 + u_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow u_2 = -8u_1 \end{aligned}$$

e então uma base dos vectores próprios é constituída, por exemplo, pelo vector

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Concluimos então que o valor próprio $\lambda = -8$ tem multiplicidade geométrica igual a 1 (dimensão do espaço dos vectores próprios) pelo que temos um único bloco de Jordan dado por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

Um vector próprio generalizado $\mathbf{w}$ associado ao vector próprio $\mathbf{u}$ é uma solução da equação

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}+8\mathbf{I})\,\mathbf{w}=\mathbf{u} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -64 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad 8w_1+w_2=1 \\
&\Leftrightarrow \quad w_2=1-8w_1.
\end{aligned}
$$

Tomando por exemplo $w_1=0$ e $w_2=1$ obtemos

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, uma decomposição de Jordan para a matriz $\mathbf{A}$ é

$$\mathbf{A}=\mathbf{SJS}^{-1}=\mathbf{S}\begin{bmatrix} -8 & 1 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

com

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos então

$$\mathbf{S}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$
\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-8t} & te^{-8t} \\ 0 & e^{-8t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{-8t} & te^{-8t} \\ -8e^{-8t} & e^{-8t}\,(1-8t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \\
&= e^{-8t}\begin{bmatrix} 1+8t & t \\ -64t & 1-8t \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Uma vez calculado $e^{\mathbf{A}t}$ temos pela fórmula da variação das constantes:

$$\mathbf{y}(t)=e^{\mathbf{A}(t-1)}\mathbf{y}(1)+\int_1^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{h}(s)\,ds.$$

Atendendo à condição inicial $\mathbf{y}(1)=\begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix}$,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= e^{-8(t-1)}\begin{bmatrix} 1+8(t-1) & t-1 \\ -64(t-1) & 1-8(t-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix}+ \\
&\quad +\int_1^t e^{-8(t-s)}\begin{bmatrix} 1+8(t-s) & t-s \\ -64(t-s) & 1-8(t-s) \end{bmatrix}\cdot e^{-8s}\begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} ds \\
&= e^{-8(t-1)}\begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix}+\int_1^t e^{-8t}\begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} ds \\
&= e^{-8(t-1)}\begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix}+(t-1)\,e^{-8t}\begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{-8(t-1)}+(t-1)\,e^{-8t} \\ -8\left(e^{-8(t-1)}+(t-1)\,e^{-8t}\right) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Assim, a solução do sistema dado é:

$$
\begin{cases} y_1(t)=e^{-8(t-1)}+(t-1)\,e^{-8t} \\ y_2(t)=-8\left(e^{-8(t-1)}+(t-1)\,e^{-8t}\right). \end{cases}
$$