Análise Matemática IV
1º semestre de 2001/2002

Exercício-teste 11

Determine a solução geral da equação diferencial

$$y''' - y' = te^{-t} + 2\cos t.$$

Resolução

Primeiro, vamos considerar a equação homogénea $y''' - y' = 0$. O polinónio associado a essa equação é $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1)$. Como as raizes são $0, 1$ e -1, a solução da equação homogénea é

$$y_h(t) = A_1 + A_2 e^t + A_3 e^{-t}, \quad \text{onde } A_1, A_2, A_3 \text{ são constantes }.$$

Segundo, vamos determinar uma solução particular da equação $y''' - y' = te^{-t}$. Como a função te^{-t} é uma solução da equação diferencial

$$y'' + 2y' + 1 = (D+1)^2(y) = 0,$$

qualquer solução particular y_{p_1} é uma solução da equação

$$(D+1)^2 D(D-1)(D+1)y = 0$$

i.e. da equação $(D+1)^3 D(D-1)y = 0$. Portanto $y_{p_1}(t)$ é da forma

$$y_{p_1}(t) = B_1 + B_2 e^t + (B_3 t^2 + B_4 t + B_5)e^{-t}.$$

Como $B_1 + B_2 e^t + B_5 e^{-t}$ é solução da equação homogénea, podemos supor que $0 = B_1 = B_2 = B_5$, e temos de determinar B_3 e B_4 tais que

$$(D^3 - D)\left(B_3 t^2 e^{-t} + B_4 t e^{-t}\right) = te^{-t}.$$

Temos então

$$\begin{aligned}
y'_{p_1} &= -B_3 t^2 e^{-t} + (2B_3 - B_4)te^{-t} + B_4 e^{-t} \\
y''_{p_1} &= B_3 t^2 e^{-t} + (-4B_3 + B_4)te^{-t} + (2B_3 - 2B_4)e^{-t} \\
y'''_{p_1} &= -B_3 t^2 e^{-t} + (6B_3 - B_4)te^{-t} + (-6B_3 + 3B_4)e^{-t} \\
y'''_{p_1} - y'_{p_1} &= 4B_3 te^{-t} + (-6B_3 + 2B_4)e^{-t}.
\end{aligned}$$

Logo, $4B_3 = 1$ e $-6B_3 + 2B_4 = 0$. Portanto $B_3 = 1/4$ e $B_4 = 3/4$ e

$$y_{p_1}(t) = \frac{t}{4}(t+3)e^{-t}.$$

Por fim, vamos determinar uma solução particular y_{p_2} da equação $y''' - y' = 2\cos t$. Como $2\cos t$ é uma solução da equação $y'' + y = 0$, qualquer solução particular y_{p_2} é uma solução da equação

$$(D^2+1)D(D-1)(D+1)y = 0.$$

Portanto $y_{p_2}(t)$ é da forma

$$y_{p_2}(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 + C_4 e^t + C_5 e^{-t}.$$

Obviamente podemos supor que $C_3 = C_4 = C_5 = 0$; portanto, temos de determinar C_1 e C_2 tais que $y_{p_2}''' - y_{p_2}' = 2\cos t$. Temos então

$$\begin{aligned} y_{p_2}' &= -C_1 \operatorname{sen} t + C_2 \cos t \\ y_{p_2}'' &= -C_1 \cos t - C_2 \operatorname{sen} t \\ y_{p_2}''' &= C_1 \operatorname{sen} t - C_2 \cos t \\ y_{p_2}''' - y_{p_2}' &= 2C_1 \operatorname{sen} t - 2C_2 \cos t. \end{aligned}$$

Logo $2C_1 = 0$ e $-2C_2 = 2$. Assim,

$$y_{p_2}(t) = -\operatorname{sen} t,$$

e a solução geral da equação é

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t) \\ &= A_1 + A_2 e^t + A_3 e^{-t} + \frac{t(t+3)}{4} e^{-t} - \operatorname{sen} t, \text{ onde } A_1, A_2, A_3 \text{ são constantes.} \end{aligned}$$