Análise Matemática IV

$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2001/2002

Exercício-teste 12

1. Calcule todas as soluções estacionárias (i.e. independentes de t) da equação não homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \operatorname{sen}(x).$$

Mostre que uma das soluções calculadas satisfaz as seguintes condições fronteira:

$$\begin{cases} u(t,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, \dfrac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

2. Determine todos os valores (reais) de β para os quais o seguinte problema (equação diferencial ordinária, linear homogénea com condições na fronteira):

$$\begin{cases} X'' - \beta X = 0 \\ X(0) = X'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

não tem solução única. Para esses valores determine a respectiva solução geral.

3. Resolva o problema.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \operatorname{sen}(x) \\ \\ u(t,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, \dfrac{\pi}{2}) = 0 \\ \\ u(0,x) = 2\operatorname{sen}(x) + 3\operatorname{sen}(5x) \end{cases}$$

$(t \geq 0, x \in [0, \frac{\pi}{2}])$.

(Sugestão: use a alínea **1.** para tornar a equação homogénea e (só) depois considere o método de separação de variáveis.**)**

Resolução:

1. Se u não depende de t ($\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$) temos

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \operatorname{sen}(x)$$

e, primitivando duas vezes, obtemos

$$u = \operatorname{sen}(x) + A + Bx$$

onde A e B são constantes arbitrárias. Esta é a expressão geral das soluções estacionárias. Tomando $A = B = 0$ obtemos

$$u = \operatorname{sen}(x) \quad \text{e} \quad u' = \cos(x)$$

que satisfaz as igualdades:

$$u(0) = 0 \quad \text{e} \quad u'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

2. Para $\beta = 0$, a equação $X'' - \beta X = 0$ tem como solução geral

$$X(x) = A + Bx,$$

pelo que $X(0) = A = 0$ e $X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = B = 0$. Portanto, para este valor de β, a solução é única ($X \equiv 0$).

Para $\beta > 0$, a equação $X'' - \beta X = 0$ tem como solução geral

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\beta}x} + Be^{-\sqrt{\beta}x},$$

porque o polinómio característico da equação é

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \beta = \left(\lambda - \sqrt{\beta}\right)\left(\lambda + \sqrt{\beta}\right).$$

Então,

$$X(0) = A + B \quad \text{e} \quad X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\beta}Ae^{\sqrt{\beta}\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\beta}Be^{-\sqrt{\beta}\frac{\pi}{2}},$$

e as condições de fronteira impõem

$$B = -A \quad \text{e} \quad A\left(e^{\sqrt{\beta}\frac{\pi}{2}} + e^{-\sqrt{\beta}\frac{\pi}{2}}\right) = 0.$$

Como para $\beta > 0$ vem $e^{\sqrt{\beta}\frac{\pi}{2}} + e^{-\sqrt{\beta}\frac{\pi}{2}} > 0$, obtemos $A = B = 0$. Assim, para valores positivos de β, a solução é única ($X \equiv 0$).

Para $\beta < 0$, a equação $X'' - \beta X = 0$ tem como solução geral

$$X(x) = A\cos\left(\sqrt{-\beta}x\right) + B\mathrm{sen}(\sqrt{-\beta}x),$$

porque o polinómio característico da equação é

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \beta = \left(\lambda - i\sqrt{-\beta}\right)\left(\lambda + i\sqrt{-\beta}\right).$$

Então,

$$X(0) = A \quad \text{e} \quad X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{-\beta}A\mathrm{sen}(\sqrt{-\beta}\frac{\pi}{2}) + B\sqrt{-\beta}\cos\left(\sqrt{-\beta}\frac{\pi}{2}\right)$$

e as condições fronteira impõem

$$A = 0 \quad \text{e} \quad B\cos\left(\sqrt{-\beta}\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Assim ou $A = B = 0$, ou

$$\begin{aligned}\cos\left(\sqrt{-\beta}\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{-\beta}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{-\beta} = (1 + 2n)\end{aligned}$$

onde n é um número inteiro não negativo. Concluímos que para haver soluções não identicamente nulas temos de ter

$$\beta = -(1 + 2n)^2 \quad \text{com} \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Portanto, só para estes valores de β a solução não é única e é dada por (para $\beta = -(1 + 2n)^2$)

$$X(x) = B\mathrm{sen}((1 + 2n)x)$$

onde B é uma constante arbitrária.

3. Seja $v(t, x) = u(t, x) - \mathrm{sen}(x)$. Então

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mathrm{sen}(x) = 0.$$

Assim,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \\ v(t,0) = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(t, \dfrac{\pi}{2}) = 0 \\ v(0,x) = \operatorname{sen}(x) + 3\operatorname{sen}(5x). \end{cases}$$

Pelo método de separação de variáveis, obtemos soluções de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ w(t,0) = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}(t, \dfrac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

da forma $w(t,x) = T\,(t)\,X\,(x)$. Temos então sucessivamente (usando os cálculos da alínea **2.** e a menos de constantes multiplicativas)

$$\begin{cases} X'' = \beta X \\ X(0) = X'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad T' = \beta T,$$

$$X(x) = \operatorname{sen}((1+2n)\,x), \quad T\,(t) = e^{-(1+2n)^2 t}$$

e

$$w(t,x) = e^{-(1+2n)^2 t}\operatorname{sen}((1+2n)\,x).$$

Fazendo uma combinação linear infinita destas soluções, chegamos a uma solução formal de (1):

$$v\,(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{-(1+2n)^2 t}\operatorname{sen}((1+2n)\,x).$$

Finalmente, considerando a condição inicial, temos

$$\begin{aligned} v\,(0,x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \operatorname{sen}((1+2n)\,x) \\ &= \operatorname{sen}(x) + 3\operatorname{sen}(5x). \end{aligned}$$

Assim, $c_n = 0$ se $n \neq 0$ e 2; $c_0 = 1$ e $c_2 = 3$.

Podemos então escrever a solução do problema proposto:

$$\begin{aligned} u\,(t,x) &= v\,(t,x) + \operatorname{sen}(x) \\ &= \left(1 + e^{-t}\right)\operatorname{sen}(x) + 3e^{-25t}\operatorname{sen}(5x). \end{aligned}$$