Análise Matemática IV
1º semestre de 2001/2002

Exercício-teste 4

Seja L a circunferência de raio 2 e centro na origem, percorrida uma vez no sentido directo. Usando o Teorema de Cauchy e as fórmulas integrais de Cauchy, calcule os seguintes integrais:

1. $$\oint_L \cos z dz;$$

2. $$\oint_L \frac{\cos z}{z-1} dz;$$

3. $$\oint_L \frac{e^{2z}}{(z-\frac{\pi}{2}i)^{10}} dz.$$

Resolução

1. A função $f(z) = \cos z$ é holomorfa (analítica) em $\mathbb{C}$, que é um conjunto aberto simplesmente conexo. Então, pelo Teorema de Cauchy, o integral de f ao longo de qualquer caminho fechado é zero. Assim,
$$\oint_L \cos z dz = 0.$$

2. A função $f(z) = \cos z$ é holomorfa (analítica) em $\mathbb{C}$ e L é um caminho seccionalmente regular que envolve o ponto $z = 1$ uma vez no sentido directo. Então, pela fórmula integral de Cauchy,
$$\oint_L \frac{\cos z}{z-1} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i \cdot \cos 1.$$

3. A função $f(z) = e^{2z}$ é holomorfa em $\mathbb{C}$. Então, pela fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem 9 de uma função holomorfa, temos:
$$\oint_L \frac{e^{2z}}{(z-\frac{\pi}{2}i)^{10}} dz = \frac{2\pi i}{9!} \cdot f^{(9)}(\frac{\pi i}{2}) = \frac{2\pi i}{9!} \cdot 2^9 \cdot e^{2 \cdot \frac{\pi}{2} i} = -\frac{2^{10}\pi i}{9!},$$
uma vez que L envolve o ponto $z = \frac{\pi}{2}i$, uma vez no sentido directo.