Análise Matemática IV
1º semestre de 2001/2002

Exercício-teste 5

Determine a série de Laurent convergente em $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ da função

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}\cos\left(\frac{2}{z-1}\right).$$

Aproveite o resultado para calcular

$$\oint_{|z-1|=1} f(z)\, dz,$$

onde a circunferência $|z-1| = 1$ é percorrida uma vez no sentido positivo.

Resolução

Temos $\cos(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ para $z \in \mathbb{C}$. Logo

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z+1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{2}{z-1}\right)^{2n} \\
&= \left(\frac{z-1+2}{z-1}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{2}{z-1}\right)^{2n} \\
&= \left(1+\frac{2}{z-1}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}\frac{1}{(z-1)^{2n}} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}\frac{1}{(z-1)^{2n}} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{(2n)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}
\end{aligned}$$

A série de Laurent pretendida é $1 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{-k}}{(z-1)^k}$, onde

$$a_{-k} = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}}\frac{2^k}{k!} & \text{se } k \text{ par } (k=2n), \\ \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}}\frac{2^k}{(k-1)!} & \text{se } k \text{ impar } (k=2n+1). \end{cases}$$

Pelo teorema dos resíduos obtemos:

$$\begin{aligned}
\oint_{|z-1|=1} f(z)\, dz &= 2\pi i\left(\mathrm{Res} f(z)\right)_{z=1} \\
&= 2\pi i a_{-1} \\
&= 4\pi i.
\end{aligned}$$