Análise Matemática IV
1º semestre de 2001/2002

Exercício-teste 6

Determine a solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} y' + a(t)\, y = a(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

onde

$$a(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t < 2\pi \\ \cos(t) & \text{se } t \geqslant 2\pi. \end{cases}$$

Resolução:

Para $t < 2\pi$, temos $y' + y = 1$. Multiplicando por um factor de integração $\mu \neq 0$, obtemos

$$(\mu y)' = \mu$$

com $\mu' = \mu$. Escolhendo por exemplo $\mu = e^t$, temos $e^t y = e^t + C$.

Como $y(0) = 0$, obtemos $C = -1$ e então,

$$y = 1 - e^{-t}$$

(temos assim que $y(2\pi) = 1 - e^{-2\pi}$).

Para $t > 2\pi$, temos $y' + \cos(t)\, y = \cos(t)$. Multiplicando por um factor de integração $\mu \neq 0$, obtemos

$$(\mu y)' = \mu \cos(t)$$

com

$$\mu' = \cos(t)\, \mu.$$

Escolhendo por exemplo $\mu = e^{\sin t}$, temos

$$e^{\sin t} y = e^{\sin t} + \tilde{C}.$$

Como $y(2\pi) = 1 - e^{-2\pi}$, obtemos $\tilde{C} = -e^{-2\pi}$ e então,

$$y = 1 - e^{-(2\pi + \sin t)}.$$

Concluímos que a solução pretendida é

$$y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{se } t < 2\pi \\ 1 - e^{-(2\pi + \sin t)} & \text{se } t \geqslant 2\pi. \end{cases}$$