

Análise Matemática IV

1^o semestre de 2001/2002

Exercício-teste 7

Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{e^t}{(1+e^t)y} \\ y(0) = -\sqrt{\ln 4}. \end{cases}$$

Resolução

A equação $\dot{y} = \frac{e^t}{(1+e^t)y}$ é uma equação separável e pode ser escrita para $y \neq 0$ na forma

$$y\dot{y} = \frac{e^t}{1+e^t}.$$

Integrando ambos os lados obtém-se

$$\frac{(y(t))^2}{2} = \ln(1+e^t) + C,$$

pelo que as soluções satisfazem a equação

$$(y(t))^2 = \ln(1+e^t)^2 + 2C.$$

Como além disso $y(0) = -\sqrt{\ln 4}$, a solução do PVI obtém-se com $C = 0$ e é dada por

$$y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^- \quad \text{tal que} \quad y(t) = -\sqrt{\ln(1+e^t)^2}.$$