Análise Matemática IV
1º semestre de 2001/2002

Exercício-teste 8

Determine se o seguinte problema de valor inicial:

$$y + (t + 2y)\,\frac{dy}{dt} = 0 \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \tag{2}$$

tem uma única solução. Explique porque é que a equação (1) tem uma e só uma solução se a condição inicial for $y(0) = y_0 \neq 0$.

Resolução

Sejam $M(t, y) = y$ e $N(t, y) = t + 2y$. Então equação (1) tem a forma

$$M(t, y) + N(t, y)\frac{dy}{dt} = 0.$$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial t} = 1,$$

a equação (1) é exacta. Portanto existe $\phi(t, y)$ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = M = y \tag{3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N = t + 2y. \tag{4}$$

Integrando a equação (3) obtém-se $\phi(t, y) = t \cdot y + h(y)$ e, aplicando equação (4), temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = t + h' = t + 2y.$$

Logo $h(y) = y^2 + C$, onde C é uma constante, que se pode tomar nula e entaão $\phi(t, y) = t \cdot y + y^2$. Como além disso $y(0) = 0$, temos uma solução implícita $\phi(t, y) = \phi(0, 0)$, ou seja $(t + y) \cdot y = 0$. Duas soluções do PVI são dadas por

$$y_1(t) = 0 \quad \text{e} \quad y_2(t) = -t.$$

Note que $N(0, y_0) = 2y_0$ é nulo se e só se $y_0 = 0$. Portanto, se $y_0 \neq 0$, a equação (1) tem uma solução única que satisfaz $y(0) = y_0$. Nesse caso a solução implícita é dada por $y^2 + ty - y_0^2 = 0$. Logo a única solução do problema é dada por

$$y(t) = \frac{-t + \sqrt{t^2 + 4y_0^2}}{2}, \quad \text{se } \; y_0 > 0$$

ou

$$y(t) = \frac{-t - \sqrt{t^2 + 4y_0^2}}{2}, \quad \text{se } \; y_0 < 0.$$

Note que a solução pode ser escrita em ambos os casos na forma

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(-t + \frac{y_0}{|y_0|}\sqrt{t^2 + 4y_0^2}\right).$$