Análise Matemática IV
$1^{\underline{\mathbf{o}}}$ semestre de 2001/2002

Exercício-teste 9

Considere a seguinte matriz:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

1. Verifique que $\mathbf{M}^3 = \mathbf{0}$.
2. Calcule $e^{t\mathbf{M}}$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. (**sugestão: USE A ALÍNEA ANTERIOR**)
3. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = -2x + y + 3z \\ y' = 4x - 2y + 2z \\ z' = -8x + 4y + 4z \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} x(1) = 1 \\ y(1) = 2 \\ z(1) = 3 \end{cases}$$

(**sugestão: USE A ALÍNEA ANTERIOR**)

Resolução

1. De facto:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^2 &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -16 & 8 & 8 \\ -32 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^3 &= \begin{bmatrix} -16 & 8 & 8 \\ -32 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Pela definição de exponencial de uma matriz temos:

$$\begin{aligned}
e^{t\mathbf{M}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbf{M}^k \\
&= \mathbf{Id} + t\mathbf{M} + \frac{t^2}{2}\mathbf{M}^2 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{bmatrix} -16 & 8 & 8 \\ -32 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1-2t-8t^2 & t+4t^2 & 3t+4t^2 \\ 4t-16t^2 & 1-2t+8t^2 & 2t+8t^2 \\ -8t & 4t & 1+4t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3. A solução é dada por:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} &= e^{(t-1)\mathbf{M}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3-2t-8(t-1)^2 & t-1+4(t-1)^2 & 3t-3+4(t-1)^2 \\ 4t-4-16(t-1)^2 & 3-2t+8(t-1)^2 & 2t-2+8(t-1)^2 \\ -8t+8 & 4t-4 & -3+4t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 9t-8+12(t-1)^2 \\ 6t-4+24(t-1)^2 \\ 12t-9 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ou seja

$$x(t) = 9t-8+12(t-1)^2$$

$$y(t) = 6t-4+24(t-1)^2$$

$$z(t) = 12t-9$$