Função Inversa e Função Implícita

29 de Março de 2010

1. Seja $F(x, y) = f(x, xy)$ (com $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2). Exprima a derivada parcial mista F_{12} à custa de derivadas parciais de f.

2. Seja $F(x, y) = f(x, y, g(x, y))$ (com $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2). Exprima as derivadas parciais de ordens 1 e 2 de F à custa de derivadas parciais de f e g.

3. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definidas por

$$\begin{aligned} &f(x, y, z) = 5(x-2)^2 + 5(y-1)^2 + 2(x-2)(y-1) + z^2 \\ &\mathbf{g}(t) = (\cos(t), \cos(t), \operatorname{sen}(t)) \end{aligned}$$

   (a) Em que pontos a curva parametrizada por $\mathbf{g}$ é vertical?

   (b) Em que pontos a superfície definida pela equação $f = 1$ é horizontal?

4. Dê um exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijectiva e de classe C^1 cuja inversa não seja de classe C^1.

5. Seja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2).$$

   (a) Determine todos os pontos para os quais o Teorema da Função Inversa garante a existência de uma inversa local para **f**.

   (b) Será **f** globalmente invertível? Justifique.

   (c) Calcule $D\mathbf{f}^{-1}(2, 2, 2)$, onde $\mathbf{f}^{-1}$ é a inversa local de $\mathbf{f}$ numa vizinhança do ponto $(1, 1, 1)$.

6. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = x^3 + x^2 - y^2.$$

   (a) Quais os pontos da curva de nível $F^{-1}(0)$ em que o Teorema da Função Implícita não garante a existência de uma vizinhança na qual o conjunto é da forma $y = f(x)$?

   (b) Esboce o conjunto de nível $F^{-1}(0)$. O que pode dizer sobre os pontos que determinou na alínea anterior?

   (c) Seja f a função cujo gráfico descreve $F^{-1}(0)$ numa vizinhança do ponto $(3, 6)$. Calcule $f'(3)$.

7. Considere a função $\mathbf{F} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{F}(x, y, z, w) = (y^2 + w^2 - 2xz, y^3 + w^3 + x^3 - z^3).$$

   (a) Mostre que existe uma vizinhança do ponto $(1, -1, 1, 1)$ na qual o conjunto de nível $\mathbf{F}^{-1}(0, 0)$ é dado por $x = f(y, w), z = g(y, w)$.

   (b) Calcule as derivadas parciais de f e g no ponto $(-1, 1)$.

8. (a) Mostre que a equação $y + y^3 = x^2 + 2xz + 2z^2$ define localmente y como função de x e z (isto é $y = f(x, z)$) numa vizinhança do ponto $(0, 0, 0)$, onde f é uma função de classe C^1.

   (b) Calcule a derivada de f no ponto $(0, 0)$.

   (c) Prove que f possui um mínimo local no ponto $(0, 0)$.