Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão B) 9 de Novembro de 2013

LEE, LEGI, LEIC-TP, LETI

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,5) **I.** Considere os conjuntos:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{(2x-1)^2}{x^2+1} \leq 4 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 \leq \frac{\pi^2}{4} \right\}, \qquad C = (A \cap B) \setminus \mathbb{Q}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$A \cap B = \left[-\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} \right].$$

b) Determine, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de C.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão de termos em A é convergente (em $\mathbb{R}$).

(ii) Qualquer sucessão de termos em C é divergente.

(iii) Toda a sucessão de termos em C tem uma subsucessão convergente.

(2,5 **II.** Considere a sucessão (b_n) definida por

$$\begin{cases} b_1 = \frac{3}{2} \,, \\ b_{n+1} = \frac{3b_n}{(2n+2)(2n+1)} \end{cases} , \quad \text{se } n \geq 1.$$

a) Por indução, mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$,

$$b_n = \frac{3^n}{(2n)!} \,.$$

b) Indique o valor de $\lim b_n$.

(4,5) **III.** Calcule ou mostre que não existem (em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\text{a) } \lim \frac{n^2\sqrt{n}}{n^3+4n+2} \qquad \text{b) } \lim \frac{(-1)^n n^3}{n^3+9} \qquad \text{c) } \lim \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{3^n+1}}$$

(7) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} e^{4x-x^2}, & \text{se } x < 1, \\ \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right), & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

a) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Decida, justificando, se existe $\lim_{x\to 1} f(x)$.

c) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a função derivada.

d) Mostre que a função é monótona em cada um dos intervalos $]-\infty, 1[$ e $]1, +\infty[$, mas não é monótona em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

e) Indique, justificando, o contradomínio de f.

(1,5) **V.** Seja g uma função contínua em $\mathbb{R}$ verificando

$$g\left(\frac{(-1)^n n + n^2}{4n^3+2} \right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{n^2 - \log n}{1+n^2} \right), \qquad \text{para todo o } n \geq 2.$$

Calcule, justificando, o valor de $g(0)$.