
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,5) **I.** Considere os conjuntos:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{(x-2)^2}{x^2+1} \leq 1 \right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 5\}, \quad C = (A \cap B) \setminus \mathbb{Q}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$A \cap B = \left[\frac{3}{4}, \sqrt{5} \right].$$

b) Determine, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de C .

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- (i) Qualquer sucessão decrescente de termos em A é convergente (em \mathbb{R}).
- (ii) Se (u_n) é uma sucessão de termos em C , então (u_n) tem pelo menos um sublimite.
- (iii) Qualquer sucessão de termos em C é convergente.

(2,5) **II.** Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2}{3}, \\ a_{n+1} = \frac{4a_n}{(2n+3)(2n+2)}, \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Por indução, mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$,

$$a_n = \frac{4^n}{(2n+1)!}.$$

b) Indique o valor de $\lim a_n$.

(4,5) **III.** Calcule ou mostre que não existem (em $\overline{\mathbb{R}}$)

$$\text{a) } \lim \frac{n\sqrt{n}}{n^2+3n+1} \quad \text{b) } \lim \frac{(-1)^n n^2}{n^2+4} \quad \text{c) } \lim \sqrt[n]{\frac{4^n}{(2n+1)!+1}}$$

(7) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right), & \text{se } x < -1, \\ e^{-4x-x^2}, & \text{se } x > -1. \end{cases}$$

- a) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- b) Decida, justificando, se existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.
- c) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a função derivada.
- d) Mostre que a função é monótona em cada um dos intervalos $]-\infty, -1[$ e $]-1, +\infty[$, mas não é monótona em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- e) Indique, justificando, o contradomínio de f .

(1,5) **V.** Seja f uma função contínua em \mathbb{R} verificando

$$f\left(\frac{4n+(-1)^n}{4n+2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{n^2 \log n}{1-n^2}\right), \quad \text{para todo o } n \geq 2.$$

Calcule, justificando, o valor de $f(1)$.