Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste/2º Teste/Exame (v. A)
30 de Junho de 2014

LEIC-A

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1º Teste

(2,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|2+x|}{9-x^2} > 0 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : e^{-x} \geq 3 \right\}, \qquad C = A \cap B.$$

(a) Mostre que $C =]-3, -2[\cup]-2, -\log 3]$.

(b) Determine, caso existam, $\inf C$, $\min C$, $\sup C$, $\text{máx}\, C$.

(c) Decida quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas:

i. Toda a sucessão de termos em C tem pelo menos um sublimite.

ii. Se (y_n) é uma sucessão estritamente decrescente de termos em C, então $\lim y_n = -3$.

iii. Existe uma sucessão (x_n) de termos em C que converge para -2.

(1,5) **II.** Considere uma sucessão (b_n) definida por

$$\begin{cases} b_1 = 2, \\ b_{n+1} = 4 + \frac{b_n}{6}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(a) Mostre que $b_n \leq 5$ para todo o $n \geq 1$.

(b) Mostre que (b_n) é uma sucessão crescente.

(c) Justifique que (b_n) é convergente e calcule o seu limite.

(1,5) **III.** Determine , ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites de cada uma das sucessões seguintes:

(a) $\lim \dfrac{n(1+2n^6)}{1-n^7}$, (b) $\lim \dfrac{n^4+3^n+n}{n!+5^n+n^3}$, (c) $\lim \dfrac{2-\operatorname{sen}^3 n}{n^3}$.

(3,5) **IV.** Considere uma função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ verificando:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}, & \text{se } x < 0, \\ \frac{\pi}{2} + \log \frac{1}{1+x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(a) Calcule, se existirem em $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(b) Decida se f é prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$.

(c) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a sua derivada.

(d) Determine os intervalos de monotonia de f e pontos de extremo, caso existam.

(e) Determine o contradomínio de f.

(1,5) **V.** Seja (b_n) uma sucessão de termos positivos tal que $\lim \frac{n^3}{b_n} = 2$. Indique, justificando, o valor de $\lim \sqrt[n]{b_n}$.

2º Teste

(1,5) **I.** Calcule:

$$\text{a) } \lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x (e^{t^2}-1)\,dt}{x^3}.$$

(1,5) **II.** Calcule:

$$\text{a) } \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{9+x^4}\,dx, \qquad \text{b) } \int_0^1 \frac{x^3}{2+x^4}\,dx.$$

(2,0) **III.** Calcule a área da região plana limitada definida por

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0 \text{ e } 1-x^2 \le y \le 1+\log(x+2)\}.$$

(2,5) **IV.** 1. Classifique quanto a convergência absoluta, convergência simples e divergência as séries

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{+\infty} \pi^n 4^{-2n}, \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n^3}{n^3+2}.$$

2. Considere a função g definida pela série de potências

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n^2+1}$$

nos pontos onde a série converge.

a) Determine o domínio de g.

b) Calcule $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx$.

(2,5) **V.** 1. Seja f uma função definida e contínua em $\mathbb{R}$ e considere

$$\psi(x) = \int_0^x e^{2x-2t} f(t)\,dt.$$

Mostre que, para todo o $x\in\mathbb{R}$, se tem

$$\psi'(x) = 2\psi(x) + f(x)$$

2. Seja $h : [0,+\infty[\;\to \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $0 < h(x) \le 1$, para todo o $x \ge 0$. Considere a função ψ definida em $[0,+\infty[$ por

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{h(t)}{1+t^2}\,dt.$$

Justifique que o contradomínio de ϕ é um intervalo da forma $[0,\beta[$ em que $0<\beta\le\frac{\pi}{2}$.