Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (v. A)

12 de Abril de 2014

LEIC-A

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,5) **I.** Considere os conjuntos:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| \frac{1}{e^x - 1} \right| > \frac{1}{2} \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq \frac{1}{2} \right\}, \qquad C = A \cap B.$$

a) Identifique os conjuntos A, B e C, mostrando em particular que

$$A =]-\infty, 0[\cup]0, \log 3[\qquad \text{e} \qquad C \subset \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right[\cup \left] 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[.$$

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, o $\inf A$, $\sup A$, $\max A$, $\inf B$ e $\max C$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão estritamente decrescente de termos em A tem limite negativo.

(ii) Qualquer sucessão (a_n) convergente e de termos em A, que verifica $a_n a_{n+1} < 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, tem necessariamente limite 0.

(iii) Toda a função definida e contínua em C tem máximo.

(4,0) **II.** Considere uma sucessão (a_n) dada por

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2}, \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_n^{3/2}}{2}, \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre que $a_n \in [0, 1]$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que (a_n) é uma sucessão decrescente.

c) Justifique que (a_n) é uma sucessão convergente e calcule o valor de $\lim a_n$.

(4,5) **III.** Calcule ou mostre que não existem (em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\text{a) } \lim \sqrt[n]{n^n + 1} \qquad \text{b) } \lim \left(\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + n\pi \right) \right)^n \qquad \text{c) } \lim (-1)^{3n} \frac{1 + n^2}{3n^3 - 1}$$

(5) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} x, & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 e^{-x}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcule ou mostre que não existe, cada um dos limites,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

b) Calcule $f'(x)$ em cada um dos pontos em que f for diferenciável. Em particular estude cuidadosamente se a derivada $f'(0)$ existe e é finita.

c) Determine e classifique todos os pontos de extremo local ou absoluto da restrição de f ao intervalo $[0, +\infty[$.

d) Justifique que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o intervalo $]-(n+1)\pi, -n\pi[$ contém um ponto de extremo local de f.

(2) **V.** Seja $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : g(x) = x\}$ é ilimitado. Mostre que, se existir $\lim_{x \to +\infty} g'(x)$, então $\lim_{x \to +\infty} g'(x) = 1$.