Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão B)

10 de Novembro de 2012, 9 horas

LEE, LEGI, LEIC (Taguspark), LERC

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 \geq \frac{2x+1}{3} \right\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 2\,|x-1|\}, \qquad C = (A \cup B) \cap \left[-\pi, \frac{2}{3}\right].$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$A \cup B = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left\{\frac{2}{3}\right\} \cup [1, +\infty[\,.$$

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de C e de $C \setminus \mathbb{Q}$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Toda a sucessão de termos em C tem um sublimite.

(ii) Se (u_n) é uma sucessão de termos em C então $\lim \frac{u_n}{n} = 0$.

2. Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} b_1 = \frac{5}{2}, \\ b_{n+1} = 4\left(1 - \frac{1}{b_n}\right) \end{cases}, \quad \text{se } n \geq 1.$$

a) Use indução matemática para mostrar que os termos da sucessão verificam $2 < b_n < 3$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (b_n) é uma sucessão decrescente.

c) Justifique que (b_n) é convergente e calcule o limite.

3. Calcule (em $\overline{\mathbb{R}}$) ou mostre que não existem os seguintes limites de sucessões:

$$\lim \frac{n!(3n+2)}{(n+1)! - n!}, \qquad \lim \frac{n^2 + (-1)^n n + 3}{3 - 2n^2}, \qquad \lim \sqrt[n]{\frac{1+e^n}{n+4}}, \qquad \lim \frac{\cos(n!)+1}{n^2+5}.$$

4. Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{\pi}{2}+x}, & \text{se } x < -\frac{\pi}{2}, \\ x \operatorname{sen} x, & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ \operatorname{arctg}(1-x), & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} g(x), \qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} g(x), \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x), \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x)$$

c) Será g prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$? Justifique.

d) Indique o contradomínio de g.

5. Seja g uma função real, definida e contínua no intervalo $[0, 2]$. Seja (β_n) a sucessão de termo geral $\beta_n = \frac{n+1}{n}$ e suponha que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad g(\beta_n)g(\beta_{n+1}) < 0.$$

Mostre que $g(1) = 0$.