Matemática Experimental[1]

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação, 1º ano — 2007/08

Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico – Lisboa

Trabalho Computacional II

Data limite de entrega: **7 de Dezembro de 2007**

Observações: O relatório do trabalho computacional (sob a forma de notebook) deve ser enviado por e-mail para *mario.graca@math.ist.utl.pt*. A primeira célula do notebook deve conter a identificação completa dos autores e número de grupo.
Antes de enviar o notebook, **apague todos os gráficos e** *output* (utilize os menus *Cell* $\longrightarrow$ *Delete All Output*), deixando apenas o *input*, texto e comentários que julgue necessários.
O trabalho deverá ser enviado em *attachment* usando nomes do tipo **TC2Gry.nb** onde **y** representa o número do grupo.
Trabalhos recebidos fora do prazo estabelecido não serão corrigidos.

---

1. Os polinómios de Fibonacci são definidos pela relação de recorrência

$$\begin{array}{ll} F_1(x) = 1 & \\ F_2(x) = x & \\ F_{n+1}(x) = x\,F_n(x) + F_{n-1}(x), & \qquad n = 2, 3, \ldots \end{array} \tag{1}$$

e podem ser calculados explicitamente através da fórmula

$$F_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-j-1}{j} x^{n-2j-1} \tag{2}$$

onde $\lfloor x \rfloor$ é a função parte inteira inferior e $\binom{n}{j}$ é um coeficiente binomial.

a) Escreva código *Mathematica* para obter uma lista contendo os polinómios de Fibonacci

$$F_j(x), \qquad j_{min} \le j \le j_{max}$$

sendo dados os números naturais j_{min} e j_{max}. Para tal, aplique:
(i) A relação (1).
(ii) A fórmula (2).
(iii) A rotina $Fibonacci[n, x]$ do sistema.

[1] http://www.math.ist.utl.pt/~mgraca/ME/index.html.

Adopte o procedimento mais rápido entre os que desenvolveu para os casos (i), (ii) e (iii) para obter uma lista dos primeiros 15 polinómios de Fibonacci, apresentando os resultados numa grelha semelhante à da Figura 1. (Sugestão: utilize o comando *Grid*).

n	$F_n(x)$
1	1
2	x
3	$1 + x^2$
4	$2x + x^3$
5	$1 + 3x^2 + x^4$

Figura 1: Primeiros 5 polinómios de Fibonacci.

b) Aproveite o código anteriormente desenvolvido para escrever uma estrutura *Manipulate*, de modo a obter um painel semelhante ao da Figura 2, onde são mostrados os primeiros 10 polinómios de Fibonacci. O parâmetro de controle, "Número de gráficos", deverá variar desde 1 a 20. (Sugestão: inclua em *Plot* as opções *Filling* $\longrightarrow$ *Axis* e *FillingStyle* $\longrightarrow$ *Opacity*[0.02]).

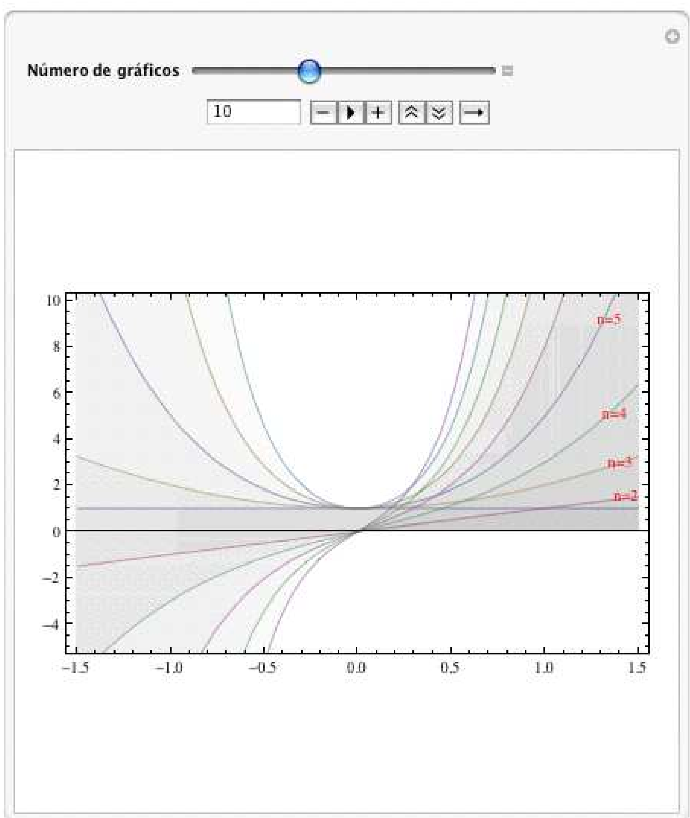

Figura 2: $F_n(x)$, $1 \leq n \leq 10$.

c) Sabe-se que o polinómio $F_n(x)$ divide o polinómio $F_m(x)$ se e só se n divide m.[2] Verifique esta propriedade para todos os pares de números (m, n), com $2 \leq n \leq 10$ e $20 \leq m \leq 30$. (Sugestão: utilize a rotina do sistema *PolynomialRemainder*).

2. Inteiros positivos x, y e z satisfazendo a condição

$$x^2 + y^2 = z^2$$

dizem-se *inteiros pitagóricos*. Como sabe, pelo teorema de Pitágoras, dado um triângulo rectângulo em que as medidas dos catetos sejam respectivamente x, y e z a medida da hipotenusa é satisfeita a relação anterior, o que justifica a designação dada aos inteiros nas condições referidas. Uma tripla pitagórica $\{x, y, z\}$ onde x, y e z sejam *primos relativos dois a dois* diz-se *tripla pitagórica primitiva*, ou simplesmente *tripla primitiva*. Verifique que $\{3, 4, 5\}$ é uma tripla primitiva.
Admita o seguinte resultado:

Teorema[3]: Sejam m e n inteiros positivos, com $m > n$. Então,
(i) Os números

$$\begin{aligned} x &= 2\,m\,n \\ y &= m^2 - n^2 \\ z &= m^2 + n^2 \end{aligned}$$

formam uma tripla pitagórica.
(ii) Se m e n forem primos relativos, e se um for par e o outro ímpar, então a tripla $\{x, y, z\}$ é primitiva.
(iii) Qualquer tripla primitiva pode ser determinada univocamente aplicando os critérios (i) e (ii).

Por exemplo:

m	n	$\{x, y, z\}$
2	1	$\{4, 3, 5\}$
3	2	$\{12, 5, 13\}$
4	1	$\{8, 15, 17\}$

a) Use o *Mathematica* para provar a alínea (i) do Teorema anterior.
b) Ao executar a instrução:

$$Reduce[\{x^2 + y^2 \;==\; z^2, x > 1, y > 1, z > 1\}, \{x, y, z\}, Integers]$$

obtém um resultado contendo certos parâmetros $C[1]$, $C[2]$ e $C[3]$. Diga que valores deverá atribuir aos parâmetros de modo a obter uma tripla primitiva.
Escreva uma função, que invocará através do comando $tripla[\{m, n\}]$, que lhe permita obter uma tripla pitagórica.

[2]Consulte, por exemplo, Weisstein, Eric W. "Fibonacci Polynomial", MathWorld, http://mathworld.wolfram.com/FibonacciPolynomial.html.

[3]Ver, por exemplo, James J. Tattersall, *Elementary Number Theory in Nine Chapters*, Cambridge University Press, 1999, página 70.

c) Aplique a função anterior a todos os pares de números inteiros positivos (m, n), tais que $2 \leq m \leq 20$ e $2 \leq n \leq 20$, guardando o resultado numa lista de nome $triplasPitagoricas$. Obtenha uma tabela das primeiras 20 triplas pitagóricas.

d) Seleccione todas as triplas primitivas existentes na lista $triplasPitagoricas$. Ordene cada um dos elementos $\{x, y, z\}$ obtidos e atribua-os à lista $triplasPrimitivas$. (Sugestão: aplique a rotina *Select*).
Mediante aplicação da rotina *ListPlot3D*, desenhe o gráfico dos pontos de $\mathbb{R}^3$ correspondentes a cada um dos elementos da lista $triplasPrimitivas$. Observando o gráfico, poderá afirmar que os pontos considerados são complanares?

e) Descreva um algoritmo e escreva um programa para decidir se os pontos representados na lista $triplasPrimitivas$ pertencem ou não ao plano, $\mathcal{P}$, definido pelos pontos $(3, 4, 5)$, $(6, 8, 10)$ e $(5, 12, 13)$. Justifique o algoritmo que utilizar e insira comentários apropriados no seu programa.

f) No caso de na alínea anterior ter concluído que os pontos não são complanares, escreva e execute um programa para calcular a distância máxima a que os pontos de $triplasPrimitivas$ se encontram do plano $\mathcal{P}$. Justifique.

g) Considere as transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, T_1 a T_3, definidas pelas matrizes:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \; T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } T_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Use o sistema *Mathematica* para decidir a respeito do valor lógico da seguinte proposição: Para i desde 1 a 3, o processo iterativo

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= [3 \quad 4 \quad 5]^T \\ x^{(k+1)} &= T_i \,.\, x^{(k)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 10^3 \end{aligned}$$

produz uma sucessão de triplas primitivas.

3. Considere o conjunto X constituído por pares de números naturais (a, b), onde a possui cinco dígitos e b quatro, sendo que os 9 dígitos do par são todos distintos e positivos. Por exemplo, $(a, b) = (93126, 4758) \in X$.

a) Qual é o cardinal do conjunto X? Justifique.

Certos pares $(a, b) \in X$ são tais que a/b é um número inteiro. Por exemplo, o par $(13458, 6729)$.

b) Representando os elementos de X por listas da forma

$$\{\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}, \{d_6, d_7, d_8, d_9\}\}$$

onde na primeira sublista estão representados os dígitos de um número a e na segunda os dígitos de um número b, escreva um programa *Mathematica* para determinar todos os pares de X satisfazendo o critério de divisibilidade acima referido. Documente devidamente o seu programa.
Sugestão: poderá recorrer, entre outrros, aos comandos $Permutations$ e $FromDigits$.

c) Aplique o programa anterior para construir uma tabela contendo todos os pares de X satisfazendo o referido critério de divisibilidade. Na Figura 3 são mostradas três linhas de uma tabela análoga à pretendida. Quantos pares de números (a, b) constam da tabela que obteve?

{93 126, 5478}	17
{93 485, 2671}	35
{93 654, 2178}	43
[illegible]	[illegible]

Figura 3: Alguns exemplos de pares (a, b) onde a é múltiplo de b. Na coluna à direita inscrevem-se os quocientes a/b.

4. Responda ao Problema 9 das folhas de exercícios Laboratório VI.