Matemática Experimental

Teste de recuperação (Parte I) – 5 Janeiro 2008

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica — Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1º ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Duração: 1 hora e 30 minutos

Apresente os cálculos, e justifique sucintamente as suas respostas.

1(a) Considere o número natural n e um seu divisor próprio positivo a, mostre que $a \leq n/2$. **[1.5]**

(b) O número 496 é perfeito? **[1.5]**
Dado um número natural n, escreva uma linha de código Mathematica que produza o resultado $True$, caso n seja perfeito, e $False$ no caso contrário.

(c) Mostre que qualquer quadrado perfeito é da forma $4\,j$ ou $4\,j+1$, onde j é um inteiro. (Sugestão: considere um inteiro x, faça $n = x^2$ e estude os casos x par, x ímpar). **[1.5]**

(d) Prove que não existe nenhum inteiro n satisfazendo a equação de inteiros $n = x^2 - y^2$, o qual dividido por 4 dê resto 2. (Sugestão: aplique o resultado da alínea anterior). **[1.5]**

2) Sejam a, b e c números inteiros, com $a \neq 0$.

(a) Mostre que é falsa a implicação **[1.5]**

$$a \mid (b\,c) \Rightarrow a \mid b \text{ ou } a \mid c$$

dando um contra-exemplo. Justifique.

(b) Como sabe, através do algoritmo de Euclides, o máximo divisor comum de a e b pode exprimir-se como combinação linear de coeficientes inteiros dos números a e b. Utilize esse facto para provar que no caso de a e b serem primos relativos a implicação anterior é válida. **[2.5]**

3) Um número natural $n \geq 2$ é composto se é divisível por algum primo menor ou igual que $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

(a) Diga, justificando, se o número 233 é primo. **[1.5]**

(b) Aplique o critério acima enunciado numa função *Mathematica*, a qual **[1.5]**

possua como argumento o número n, dando como resultado esse número e a mensagem "primo", caso n seja primo, e a mensagem "composto", no caso contrário.

(c) Calcule o resto da divisão de 3^{470} por 23. (Sugestão: comece por aplicar o "Pequeno Teorema de Fermat"usando o número primo 23 e a base 3). **[2.0]**

4) Dados três pontos não colineares A, B e C do plano, através das respectivas coordenadas $(A1, A2)$,$(B1, B2)$ e $(C1, C2)$, o código a seguir permite calcular o centro da circunferência que passa pelos pontos dados. Tal código é constituído pelos procedimentos *pontos* e *centro*:

$pontos[A1\_, A2\_, B1\_, B2\_] := Module[\{Xa = A1, Xb = B1, Ya = A2, Yb = B2\},$
$a = Xb - Xa;$
$b = Yb - Ya;$
$Xm = 1/2\,(Xa + Xb);$
$Ym = 1/2\,(Ya + Yb);$
$c = b\;Ym + a\;Xm;$
$\{a, b, c\}]$

$centro[A1\_, A2\_, B1\_, B2\_, C1\_, C2\_] := Module[$
$\{Xa = A1, Xb = B1, Ya = A2, Yb = B2, Xc = C1, Yc = C2\},$
$\{a, b, c\} = pontos[Xa, Ya, Xb, Yb];$
$\{d, e, f\} = pontos[Xb, Yb, Xc, Yc];$
$LinearSolve[\{\{a, b\}, \{d, e\}\}, \{c, f\}]$
$]$

(a) Diga, justificando, qual o significado geométrico da recta $a\,x + b\,y = c$, onde os coeficientes a, b e c foram calculados através do procedimento *pontos*. **[2.5]**

(b) Inspirado no algoritmo anterior, escreva código *Mathematica* que lhe permita calcular o ponto do plano onde se cruzam as alturas de um triângulo de vértices A, B e C. Justifique. **[2.5]**