

Matemática Experimental

Teste de recuperação (Parte II) – 5 de Janeiro de 2008

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica — Departamento de
Matemática, Instituto Superior Técnico

1º ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Duração: 1 hora e 30 minutos

Apresente os cálculos, e justifique sucintamente as suas respostas.

- 1 (a)** Dada uma fracção positiva da forma $\frac{1}{m} = (0.d_1d_2\dots d_k\dots)_{10}$, com $m \geq 2$, explique como e porquê se podem obter os seus dígitos d_i mediante aplicação do algoritmo da divisão inteira. [1.5]
- (b)** Sendo $m = 11$, obtenha os dígitos d_1 a d_5 da respectiva fracção. [1.0]
- (c)** Considere um número primo $p \geq 7$. Mostre que a fracção $1/p$ se exprime como uma dízima infinita. [2.0]
- 2.** Considere o número $n = (770)_{16}$.
- (a)** Escreva o número n na base 8. Justifique. [1.5]
- (b)** A partir do resultado que obteve na alínea anterior e aplicando devidamente o algoritmo de Horner, obtenha a representação de n na base 10. [1.5]
- (c)** Escreva uma instrução *Mathematica* que lhe permita verificar o resultado calculado na alínea 2(b). Justifique. [1.5]
- 3.** Um agricultor, chamado José, foi a uma feira comprar perús e leitões. Cada Perú custou 21 euros e cada leitão 31. O Senhor José gastou 1770 euros para adquirir os animais.
- (a)** Um vizinho ao ver o agricultor chegar a casa, comentou: “O José comprou um número de leitões que é múltiplo positivo de três!”. Diga se o tal vizinho, além de intrometido, é mentiroso. Justifique. [1.5]
- (b)** Sabendo que o Senhor José trouxe pelo menos um animal de cada espécie, é possível que ele tenha adquirido mais perús que leitões? [1.5]
- (c)** Caso pudesse usar o *Mathematica*, escreva uma linha de código que lhe permitisse obter resposta para a alínea anterior. [1.5]

4. Considere a equação $x^3 e^x = 1$ e a sucessão

$$x_0 = 1$$
$$x_{n+1} = \frac{e^{-x_n} + x_n^3 (2 + x_n)}{x_n^2 (3 + x_n)} \quad n = 0, 1, \dots$$

(a) Mostre que existe uma única raiz z da equação no intervalo $I = [1/2, 1]$. [1.5]

(b) Mostre que a sucessão $(x_n)_{n \geq 0}$ corresponde ao método de Newton. [1.5]

(c) Através de um esboço conclua se se poderá conjecturar que a sucessão converge. No caso da sucessão convergir, converge monotonamente? O que pode afirmar a respeito da sua ordem de convergência? Justifique. [1.5]

(d) Escreva um método de ponto fixo baseado numa das funções iteradoras [2.0]

$$g_1(x) = x^4 e^x \quad \text{ou} \quad g_2(x) = e^{-x/3}$$

o qual convirja para z , uma vez escolhido um ponto de partida suficientemente próximo do ponto z . Justifique.

Por que razão não poderá calcular aproximações de z usando um método de ponto fixo com a outra função iteradora?