Teste de recuperação (Parte II) — Matemática Experimental

3 de Janeiro de 2007

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1^o ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Resolução

1 a) **[2.0]**

$$
\begin{aligned}
z = & 4^{-3} + 2 \times 4^{-4} + 3 \times 4^{-5} + \\
& +4^{-8} + 2 \times 4^{-9} + 3 \times 4^{-10} + \\
& +4^{-13} + 2 \times 4^{-14} + 3 \times 4^{-15} + \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z = & 4^{-3}\,(1 + 4^{-5} + 4^{-10} + \ldots) + 2 \times 4^{-4}\,(1 + 4^{-5} + 4^{-10} + \ldots) + \\
& +3 \times 4^{-5}\,(1 + 4^{-5} + 4^{-10} + \ldots) = \\
& = (4^{-3} + 2 \times 4^{-4} + 3 \times 4^{-5}) \times \frac{1}{1 - 4^{-5}} = \\
& \frac{4^2 + 2 \times 4 + 3}{4^5} \times \frac{4^3}{4^3 - 1} = \frac{27}{16 \times 63} = \frac{3}{112}
\end{aligned}
$$

1 b) O número racional w é irredutível e $mdc(10, 31) = 1$. Sabe-se que a sua representação decimal é infinita e periódica. Além disso, atendendo a que $10 \equiv 10 \pmod{31}$, $10^2 \equiv 7 \pmod{31}$, $10^3 \equiv 8 \pmod{31}$, $10^4 \equiv 18 \pmod{31}$, $10^5 \equiv 10 \pmod{31}$, necessariamente o seu período é superior a 5. O período é igual ao menor expoente, j, de 10^j por forma que este número dê resto 1 quando dividido por 31. **[2.0]**

2) Pretende-se determinar números inteiros, não negativos, x e y, representando respectivamente o número de selos de 6 cêntimos e de 35 cêntimos. Como $mdc(6, 35) = 1$, a equação $6\,x + 35\,y = 760$ possui solução nos inteiros. Resta saber se é possível determinar (x, y) não negativos. Como **[2.5]**

$$1 = 6 \times 6 - 35$$

uma solução particular da equação é $(6, -1)$, e a solução geral é

$$
\begin{aligned}
x_k &= 4560 - 35\,k, \quad k \in \mathbb{Z} \\
y_k &= -760 + 6\,k
\end{aligned}
$$

Como $x_k \geq 0$ e $y_k \geq 0$ se e só se $127 \leq k \leq 130$, há $130 - 127 + 1 = 4$ possibilidades para selar a carta.

3 a) **[1.5]**

$$\begin{aligned} p(x) &= 21\,x^7 + 3\,x^5 + 2\,x^3 - 4\,x + 2 \\ &= ((((((21\,x + 0)\,x + 3)\,x + 0)\,x + 2)\,x + 0)\,x - 4)\,x + 2 \end{aligned}$$

	21	0	3	0	2	0	-4	2
-2		-42	84	-174	348	-700	1400	-2792
	21	-42	87	-174	350	-700	1396	-2790

$$p(-2) = -2790$$

3 b) **[2.5]**

$$\begin{aligned} &data = \{21, 0, 3, 0, 2, 0, -4, 2\}; \\ &f[x\_, y\_] := -2\,x + y \\ &FoldList[f, 0, data] \\ &Last[\%] \end{aligned}$$

3 c) Em j passos é calculado o valor $p(\bar{x})$. Em cada passo do algoritmo é efectuada uma adição e uma multiplicação. Por conseguinte, no total, são efectuadas $2\,j$ operações elementares, pelo que o algoritmo possui complexidade linear. **[1.5]**

4 a) Pretende-se determinar um número α tal que α^4=15. Esse número é positivo e solução da equação $h(x) = x^4 - 15 = 0$. Como h é contínua em $\mathbb{R}$, e $h(1) = -14 < 0$, $h(2) = 1 > 0$, pelo teorema de Bolzano existe pelo menos um número $z \in (1, 2)$ tal que $h(z) = 0$. Atendendo a que $h'(x) = 4\,x^3 > 0$, $\forall x \in I = [1, 2]$, a função h é crescente, pelo que existe um só zero de h nesse intervalo. Como para $0 \leq x \leq 1$, a função h é negativa, e para $x > 2$ é positiva e crescente, o número α é necessariamente a raiz (única) positiva da equação $h(x) = 0$. **[1.5]**

4 b) Seja x_1 a primeira iterada do método da bissecção: $x_1 = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}$. **[1.5]**
Como $h(x_1) = \dfrac{3^4}{16} - 15 < 0$, a raiz α localiza-se no subintervalo $[\dfrac{3}{2}, 2]$. Por conseguinte, a segunda iterada é: $x_2 = \dfrac{\frac{3}{2}+2}{2} = \dfrac{7}{4}$, logo $m = 7$.
O erro absoluto de x_2 é limitado pela distância de x_2 a x_1, isto é,

$$|\beta - \alpha| = |x_2 - \alpha| \leq |x_2 - x_1| = \frac{1}{4}$$

4 c) Atendendo a que $G(\alpha) = \dfrac{4\,\alpha - 15 + 15}{4} = \alpha$, por definição, α é ponto fixo de G. **[2.0]**

Como $G'(x) = 1 - x^3$ e $G'(\alpha) = 1 - 15^{3/4} < -1$, o ponto fixo é repulsor para a função iteradora G. Assim, as iteradas x_1, x_2, … não podem convergir para o ponto α.

4 d) **[2.5]**

$$
\begin{array}{l}
h[x\_] := x^4 - 15; \\
X0 = \{1.0, 2.0\}; \\
secante[x\_List] := Module[\{x2 = x[[2]], x1 = x[[1]]\}, \\
\qquad\qquad \{x2, x2 - x2(x2 - x1)/(h[x2] - h[x1])\}]; \\
Map[Last, NestList[secante, X0, 5]]
\end{array}
$$