Teste de recuperação (Parte I) – Matemática Experimental

3 de Janeiro de 2007

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1^o ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Resolução

1 a) **[2.0]**

Input: a inteiro negativo e b inteiro positivo.
$j \leftarrow 1$ (* contador do número de múltiplos negativos de b tal que $(-j-1)\,b < a \leq (-j)\,b$ *)
$While\ (-j \times b) > a \quad do$
incrementar j
od;
Output: $-j$.

1 b) **[2.0]**

$quociente[a\_Integer\ /;\ a \geq 0, b\_Integer?Positive] := Module[\{i\},$
$i = 1;$ $(*$ contador do número de múltiplos positivos de b não superiores a a $*)$
$While[i\,b \leq a,$
$i++$
$];$
$i-1];$

$(*$ ver alínea 1a) $*)$
$quociente[a\_Integer\ /;\ a < 0, b\_Integer?Positive] := Module[\{j\},$
$j = 1;$
$While[-j * b > a,$
$j++$
$];$
$-j];$

Teste:
(i) $a = 17$ e $b = 5$

i	$i\,b$
1	5
2	10
3	15
4	$20 > 17$

$17 = 5 \times 3 + 3 \;\longrightarrow 3 = i - 1.$
(ii) $a = -15$ e $b = 5$

j	$-j\,b$
1	-5
2	-10
3	-15

$-15 = 5 \times (-3) \;\longrightarrow -3 = -j.$

1 c) Como um número natural j é múltiplo de $a \geq 1$ se e só se existe $k \in \mathbb{N}$ **[1.0]**

tal que $j = k\,a$, então os números $a, 2a, \ldots, k\,a \leq b$ são todos os múltiplos positivos de a que não são superiores a b. Uma vez que o quociente $q \in \mathbb{N}$ de a por b é o maior inteiro que multiplicado por a dá um número não superior a b, logo o o número de múltiplos de a nas condições pretendidas é o número $k = q$.

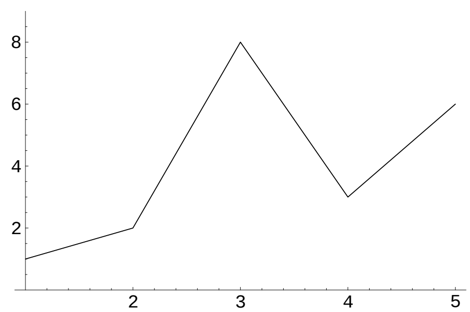
2 a) **[2.0]**

$$\begin{aligned}&Collatz[n\_Integer?Positive] :=\\ &\qquad NestWhileList[If[EvenQ[\#], \#/2, 3\,\# + 1]\&, n, (\# \neq 1)\&]\end{aligned}$$

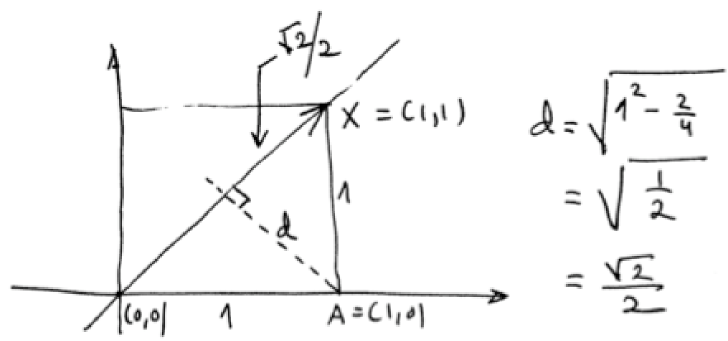
2 b) **[1.0]**

k	$\#(Collatz[k])$
1	1
2	2
3	8
4	3
5	6

3 a) A função $d[t]$ dá o quadrado da distancia entre o ponto A e o ponto genérico $r[t]$ da recta r. A varíável α representa o ponto da recta r que se encontra à menor distância do ponto A. **[1.5]**



3 b) **[1.5]**



$$distancia[\{1,0\},\{1,1\},\{1,1\}] \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3 c) **[2.5]**

$distancia1[A\_?VectorQ, X\_?VectorQ, u\_?VectorQ] :=$
$Module[\{r, d, tt, t0, \alpha\},$
  $r[t\_] := X + t\,u;$
  $tt = Flatten[Solve[r[t][[3]] == 0, t]];$
$(*$ tt calcula o valor
 do parâmtero t para o qual se anula a terceira compondente de $r[t]$ $*)$
  $t0 = t\,/.\,tt;$
  $\beta = r[t]\,/.\,t \,\rightarrow\, t0;$
  $\{\beta, \sqrt{Apply[Plus, (A-\beta)^2]}$
   $]$

4 a) O polinómio característico é da forma **[2.5]**

$$p(x) = x^3 - \frac{3}{4}\,x^2 - \frac{1}{4}\,x + \frac{3}{16} = 0$$

Como $x = 1/2$ é solução da equação anterior, podemos obter o quociente de $p(x)$ por $(x - 1/2)$ através, por exemplo, do algoritmo de Horner. Resulta,

$$p(x) = (x^2 - \frac{1}{4}\,x - \frac{3}{8})\,(x - \frac{1}{2}),$$

portanto, $a = -1/4$ e $b = -3/8$.

4 b) Os restantes zeros de $p(x)$ são: $\dfrac{3}{4}$ e $-\dfrac{1}{2}$. Por conseguinte, a sucessão $(s_n)_{n\geq 0}$ tem a forma **[2.5]**

$$s_n = \alpha\,(\frac{3}{4})^n + \beta\,(-\frac{1}{2})^n + \gamma\,(\frac{1}{2})^n,\ n \geq 0$$

a qual tende para 0 quando n tende para infinito. A sucessão dada é, portanto, limitada.

4 c) **[1.5]**

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3/4 & -1/2 & 1/2 \\ (3/4)^2 & (-1/2)^2 & (1/2)^2 \end{bmatrix}$ e o vector $\begin{bmatrix} -10^2 \\ 10^2 \\ 0 \end{bmatrix}$.