Teste de recuperação (Parte I)
Matemática Experimental

5 Janeiro de 2008

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1º ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Resolução

1 a) Visto que a é divisor próprio de n, $1 \leq a < n$ e existe $q > 1$ tal que $n = a\,q$. Suponhamos que $a > \dfrac{n}{2} \Leftrightarrow 2\,a > n = a\,q$. Então, $2 > q \Rightarrow q = 1$, o que é falso. Logo, $a \leq n/2$. **[1.5]**

1 b) Os divisores próprios de 496 são: **[1.5]**

$$1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124 \text{ e } 248$$

A soma destes divisores é 496, logo este número é perfeito.

$$Apply[Plus, Divisors[n]] == 2\,n$$

1 c) Seja x par, isto é, $x = 2\,i$, onde $i \in \mathbb{Z}$. Então, $x^2 = 4\,i^2 = 4\,j,\ j \in \mathbb{Z}$. De igual modo, para x ímpar, $x = 2\,i - 1 \Rightarrow x^2 = 4\,i^2 - 4\,i + 1$, isto é, $x^2 = 4\,j + 1$, onde $j \in \mathbb{Z}$. **[1.5]**

1 d) Basta atender à última coluna da seguinte tabela: **[1.5]**

x^2	y^2	$x^2 - y^2$	$n \equiv ? \pmod 4$
$4\,i$	$4\,j$	$4\,(i-j)$	0
$4\,i$	$4j+1$	$4\,(i-j)-1$	3
$4\,i+1$	$4\,j$	$4\,(i-j)+1$	1
$4\,i+1$	$4\,j+1$	$4\,(i-j)$	0

Por conseguinte n não é divisível por 4.

2 a) Por exemplo, $4 \mid (2 \times 6)$ mas $4 \nmid 2$ e $4 \nmid 6$, logo a implicação é falsa. **[1.5]**

2 b) Sabe-se que existem inteiros r e s tais que **[2.5]**

$$a\,r + b\,s = 1 \qquad (*)$$

Como $a \mid (b\,c)$, então existe inteiro q tal que

$$b\,c = q\,a \qquad (**)$$

Multiplicando $(*)$ por c obtém-se a igualdade $a\,r\,c + b\,s\,c = c$. Atendendo a $(**)$, resulta

$$a\,r\,c + q\,a\,s = c$$

e, por conseguinte, $a \mid c$.

3 a) $\lfloor\sqrt{233}\rfloor = 15$. Ora, 233 não é divisível por 2,3,5,7,11 e 13, logo é primo. **[1.5]**

3 b) **[1.5]**

```
compostoQ[n_Integer /; n >= 2] := (
i = 1;      (*   i é a ordem do i-ésimo primo   *)
While[p = NextPrime[i];
p <= Floor[Sqrt[n]],
If[Mod[n, p] == 0, Return["composto"]];
i ++
      ];
{n,  "primo"})
```

3 c) Como $3^{23} \equiv 3 \pmod{23}$, e $mdc(3, 23) = 1$, resulta **[1.5]**

$$3^{22} \equiv 1 \pmod{23}$$

Atendendo a que $n = 3^{470} = (3^{22})^{21} \times 3^8$ e $3^8 \equiv 6 \pmod{23}$, então $n \equiv 3^8 \equiv 6 \pmod{23}$, isto é, o resto da divisão de n por 23 é 6.

4 a) Um ponto genérico, de coordenadas (x, y), da recta perpendicular ao meio do segmento AB satisfaz a equação $(x - Xm, y - Ym) \cdot (a, b) = 0$, isto é, $a\,x + b\,y = c$, onde $c = a\,Xm + b\,Ym$. **[2.5]**

4. b) Dados dois pontos $A = (Xa, Ya)$, $B = (Xb, Yb)$ e um terceiro ponto $P = (Xp, Yp)$, a recta passando em P e perpendicular ao segmento AB satisfaz a equação **[2.5]**

$$(x - Xp, y - Yp) \cdot (a, b) = 0, \quad \text{onde} \quad a = Xb - Xa,\ b = Yb - Ya,$$

ou seja,

$$a\,x + b\,y = c, \quad \text{sendo} \quad c = a\,Xp + b\,Yp.$$

A nova rotina *pontos* a seguir, produz a lista dos parâmetros a, b e c nas condições referidas:

$pontos[A1\_, A2\_, B1\_, B2\_, C1\_, C2\_] := Module[\{Xa = A1, Xb = B1,$
$Ya = A2, Yb = B2, Xp = C1, Yp = C2\},$
$a = Xb - Xa;$
$b = Yb - Ya;$
$c = b\ Yp + a\ Xp;$
$\{a, b, c\}]$

A função *pontos* anterior é chamada duas vezes pela seguinte rotina *alturas* que resulta de modificarmos a rotina *centro* dada, tendo em vista a determinação do ponto de intersecção das rectas que permitem, respectivamente, obter as alturas do triângulo:

$alturas[A1\_, A2\_, B1\_, B2\_C1\_, C2\_] := Module[$
$\{Xa = A1, Xb = B1, Ya = A2, Yb = B2, Xc = C1, Yc = C2\},$
$\{a, b, c\} = pontos[Xa, Ya, Xb, Yb, Xc, Yc];$
$\{d, e, f\} = pontos[Xb, Yb, Xc, Yc, Xa, Ya];$
$LinearSolve[\{\{a, b\}, \{d, e\}\}, \{c, f\}]$
$]$

O resultado é a lista x, y contendo as coordenadas do ponto de intersecção pretendido.