Teste de recuperação
Matemática Experimental

5 de Janeiro de 2008

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1º ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Resolução

1 a) De **[1.5]**

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{m} = (0.d_1\, d_2\, d_3 \ldots)_{10} \\ &= d_1 \times 10^{-1} + d_2 \times 10^{-2} + d_3 \times 10^{-3} + \ldots \end{aligned}$$

resulta $10\,x = d_1 + d_2 \times 10^{-1} + d_3 \times 10^{-2} + \ldots$, logo d_1 é a parte inteira de $10\,x$. Pelo algoritmo da divisão inteira, $10 = m \times q_1 + r_1$, donde

$$10\,x = \frac{10}{m} = q_1 + \frac{r_1}{m} \Rightarrow d_1 = q_1$$

Caso $r_1 \neq 0$,

$$10\,(10\,x - d_1) = d_2 + d_3 \times 10^{-1} + \ldots$$

Pelo algoritmo da divisão

$$10\,r_1 = m \times q_2 + r_2$$

pelo que

$$10\,(10\,x - d_1) = 10\,(10\,x - q_1) = 10\frac{r_1}{m} = q_2 + \frac{r_2}{m} \Rightarrow d_2 = q_2$$

Enquanto os restos r_i forem não nulos o algoritmo prossegue de forma análoga.

1 b) **[1.0]**

$$\begin{aligned} &10 = 11 \times 0 + 10 \Rightarrow d_1 = 0 \\ &100 = 11 \times 9 + 1 \Rightarrow d_2 = 9 \\ &10 = 11 \times 0 + 10 \Rightarrow d_3 = d1, \quad d_4 = d2, d_5 = d_1, \ldots \end{aligned}$$

$$= (0.\overline{09})_{10}$$

1 c) A dízima em causa é infinita periódica porquanto nenhum dos restos das divisões inteiras sucessivas por p é nulo. Com efeito, se existisse um resto nulo, numa certa etapa do algoritmo seria válida a equação de inteiros **[2.0]**

$$\begin{array}{l} 10\,r_i = p \times d_i + 0 \qquad 1 \leq r_i \leq p-1 \\ \Rightarrow\; 10\,r_i \equiv 0 \pmod{p} \end{array}$$

Como $mdc(r_i, p) = 1$, a congruência anterior não é verdadeira pois p é primo e $p \geq 7$. Por conseguinte, nenhum dos restos é nulo pelo que a dízima é infinita.

2 a) **[1.5]**

$$n = 7 \times 16^2 + 7 \times 16 = 1792 + 112 = (1904)_{10}$$

$$\begin{array}{l} 1904 = 8 \times 238 + 0 \\ 238 = 8 \times 29 + 6 \\ 29 = 8 \times 3 + 5 \\ 3 = 5 \times 0 + 3 \\ \qquad \Rightarrow n = (3560)_8 \end{array}$$

2 b) **[1.5]**

$$\begin{array}{ll} n & = 3 \times 8^3 + 5 \times 8^2 + 6 \times 8 \\ & ((3 \times 8 + 5) \times 8 + 6) \times 8 \\ & = 1904 \end{array}$$

2 c) **[1.5]**

$$FromDigits[\{3,5,6,0\},8]$$

3 a) Sendo x o número de perús e y o número de leitões, a equação diofantina a resolver é $21\,x + 31\,y = 1770$, a qual possui solução pois $mdc(21,31) = 1$ e $1 \mid 1770$. Da equação diofantina resulta **[1.5]**

$$31\,y \equiv 0 \pmod{3}$$

e como $mdc(31,3) = 1$, vem $y \equiv 0 \pmod{3}$. Assim, é verdade que o número de leitões é múltiplo de 3.

3 b) **[1.5]**

A solução geral é:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1770 \times 3 - 31\,k = 5310 - 31\,k \\ x = 1770 \times (-2) + 21 = -3540 + 21\,k \qquad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Há que resolver as desigualdades

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \leq 5310 - 31\,k \\ 1 \leq -3540 + 21\,k \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k \leq \dfrac{5309}{31} = 171 + \dfrac{8}{31} \\ k \geq 354121 = 168 + \dfrac{7}{21} \end{array}\right.$$

ou seja, $168 \leq k \leq 171$, logo existe a possibilidade do Sr. José ter adquirido mais leitões que perús.

3 c) **[1.5]**

$$Reduce[\{5310 - 31\,k \geq 1, -3540 + 21\,k \geq 1\}, k, Integers]$$

4 a) A função $f(x) = x^3\,e^x - 1$ é contínua em $I = [1/2, 1]$. Como $f(1/2) = e^{1/2}/8 - 1 < 0$ e $f(1) = e - 1 > 0$, existe pelo menos um zero z de f no intervalo. Atendendo a que **[1.5]**

$$f'(x) = x^2\,e^x(3 + x) > 0 \qquad \forall\, x \in I$$

a função é estritamente crescente, logo z é único.

4 b) Seja $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ a função iteradora de Newton. Então, **[1.5]**

$$\begin{aligned} g(x) &= x - \frac{x^3\,e^x - 1}{x^2\,e^x\,(3 + x)} = x - \frac{x^3 - e^{-x}}{x^2\,(3 + x)} = \\ &= \frac{2\,x^3 + x^4 + e^{-x}}{x^2\,(3 + x)} = \frac{x^3\,(2 + x) + e^{-x}}{x^2\,(3 + x)} \end{aligned}$$

A sucessão $x_1 = 1$, $x_{n+1} = g(x_n)$, $\quad n = 0, 1, \ldots$, corresponde portanto ao método de Newton.

4 c) Visto que $f'(x) > 0\ \forall\, x \in I$, o zero z é simples e a função é estritamente **[1.5]**

crescente. Sabe-se que uma vez escolhido um ponto de partida x_0 suficientemente próximo de z, o método converge para z e a convergência é quadrática. Atendendo a que $f''(x) = x\,e^x\,[2\,(3 + x) + x(3 + x) + x] > 0 \quad \forall\, x \in I$, o gráfico de f possui a concavidade voltada para cima do eixo dos $x's$. Dado que $z \simeq 0.8$, escolhido $x_0 = 1$, a convergência será monótona.

4 d) Seja x_0 próximo de z e $x_{n+1} = g_2(x_n) \quad n = 0, 1, \ldots$. Este processo converge para z pois este ponto fixo é atractor de g_2, uma vez que: **[2.0]**

$$g_2'(x) = -\frac{1}{3}\,e^{-x/3} \Rightarrow 0 < |g_2'(x)| \leq \frac{1}{3}\,e^{-1/6} < 1 \quad \forall\, x \in I$$

No entanto, o mesmo ponto fixo é repulsor para a função iteradora g_2, porquanto:

$$g_1'(x) = x^3\, e^x (4 + x) > 0 \quad \forall x \in I$$

e $g_1'(z) > 1$ pois $z \simeq 0.8$.