2º teste de Matemática Experimental

11 de Dezembro de 2007

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1º ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Resolução

1 a) **[1.0]**

$$c_4 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{1+\frac{1}{4}}}} = \frac{82}{29}$$

1 b) Sabe-se que c_4 é aproximação racional de $z = \sqrt{8}$ por defeito e c_3 aproximação racional por excesso, isto é, $c_4 < z < c_3$. Assim, fazendo $\beta = c_3 = \dfrac{17}{6}$, é satisfeita a desigualdade $|z - c_4| < c_3 - c_4$. **[1.5]**

1 c) **[2.0]**

$$\sqrt{8} = 2 + \frac{1}{x_1} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{8}-2} = \frac{\sqrt{8}+2}{4} = \frac{4+(\sqrt{8}-2)}{4} = 1 + \frac{1}{x_2}$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - 1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{8}+2}{4} - 1} = \frac{4}{\sqrt{8}-2} = \frac{4(\sqrt{8}+2)}{4} = \sqrt{8}+2 \overset{(*)}{=} 4 + \frac{1}{x_1}$$

Por conseguinte, a fracção contínua é periódica ($\sqrt{8} = [2; 1, 4, 1, 4, 1, 4, \ldots]$), de período 2 e ordem 1.

1 d) Pela "Lei da melhor aproximação por convergentes", o número racional mais próximo de $\sqrt{8}$, da forma considerada, é a fracção $c_4 = 82/29$. **[1.5]**

1 e) Uma vez calculado o convergente $c_k = \dfrac{p_k}{q_k}$ do número δ, tal que $q_k > \sqrt{n}$, fazendo $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p_k}{q_k}$ sabe-se que **[1.5]**

$$|\delta - c_k| < \frac{1}{q_k^2} < \frac{1}{n}$$

2) Suponhamos que $\sqrt{7}$ é racional. Então, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\sqrt{7} = m \Leftrightarrow m^2 = 7$. Por conseguinte 7 é composto, o que é falso pois 7 é primo. Logo, $\sqrt{7}$ é irracional. **[2.0]**

3 a) Para $a = 27$, $b = -450$, $c = 36$, $d = mdc(a, b) = 9 \mid 36$, logo a equação dada tem solução. Uma solução da equação $27\,r - 450\,s = 9$ é $r = 17$ e $s = 1$, e a solução geral da equação diofantina dada é: **[1.0]**

$$\begin{cases} \alpha = (c/d)\,r - (b/d)\,k = 4 \times 17 + 50\,k & \quad k \in \mathbb{Z} \\ \beta = (c/d)\,s + (a/d)\,k = 4 + 3\,k \end{cases}$$

3 b) A classe $\overline{252}$ não possui inversa módulo 360 pois os números 252 e 360 não são coprimos. **[1.5]**

3 c) Como $mdc(107, 360) = 1$, existe $(\overline{107})^{-1}$. A classe satisfazendo a equação dada é $\bar{x} = (\overline{107})^{-1}\,.\,\bar{4}$. Ora, $\overline{-253} = \overline{107}$. Logo $(\overline{107})^{-1} = \overline{-37} = \overline{323}$. **[1.5]**
Assim,

$$\bar{x} = \overline{323}\,.\,\overline{4} = \overline{1292} = \overline{212}.$$

3 d) Por exemplo, $4\,x \equiv 4 \pmod 6$. Neste caso 4 não possui inverso modúlo 6 pois $d = mdc(4, 6) = 2 > 1$. Mas como $d \mid 4$, a congruência em causa possui solução. **[1.0]**

4 a)) **[2.0]**

```
base3[n_Integer?Positive] :=
(   (* caso n < 3,   o resultado é o resto da divisão por 3.
                Sair com a lista contendo o resto *)
If[n < 3, Return[{Mod[n, 3]}]];
x = n; resultado = { };
 (*    Enquanto o quociente de x por 3 for não nulo,
          acrescenta o resto da divisão de x por 3 à lista do resultado
          usando PrependTo     *)
```

$While[quociente = IntegerPart[x/3];$
$quociente! = 0,$
$resto = Mod[x, 3];$
$PrependTo[resultado, resto];$
(* prossegue atribuindo a x o último quociente calculado *)
$x = quociente];$
(* O último resto a acrescentar está na variável x *)
$PrependTo[resultado, x]$
)

4 b) Para $2/7 = (0.c_1\, c_2\, c_3 \cdots c_n \cdots)_{10}$, os dígitos c_i são os quocientes sucessivos das seguintes divisões por 7: **[1.5]**

$$\begin{array}{l} 20 = 7 \times 2 + 6 \\ 60 = 7 \times 8 + 4 \\ 40 = 7 \times 5 + 5 \\ 50 = 7 \times 7 + 1 \\ 10 = 7 \times 1 + 3 \\ 30 = 7 \times 4 + 2 \end{array}$$

O processo repete-se. Assim a fracção $2/7 = (0.\overline{285714})_{10}$ é representada por uma dízima infinita periódica, de período 6 e ordem 1.
Como $mdc(2, 7) = mdc(7, 10) = 1$, sabe-se que o período é dado pela primeira potência de 10 que dê resto 1 quando divididida por 7:

$$\begin{array}{l} 10 \equiv 3 \pmod 7 \\ 10^2 \equiv 2 \pmod 7 \\ 10^3 \equiv 6 \pmod 7 \\ 10^4 \equiv 4 \pmod 7 \\ 10^5 \equiv 5 \pmod 7 \\ 10^6 \equiv 1 \pmod 7 \end{array}$$

4 c) Seja $n = c_k\, 10^k + c_{k-1}\, 10^{k-1} + \ldots + c_2\, 10^2 + c_1\, 10 + c_0$, com $c_i \in \mathbb{N}_0,\ 0 \le i \le k$. **[2.0]**
Como $10 \equiv 10 \pmod{12}$ e $10^j \equiv 4 \pmod{12}\ \forall\, j \ge 2$, então

$$n \equiv 4\,(c_k + c_{k-1} + \ldots c_2) + 10\, c_1 + c_0$$

Assim, n é divisível por 12 se e só se

$$12 \mid (c_0 + 10\, c_1 + \sum_{i=2}^{k} c_i) \qquad (*)$$

Seja $n = (7\alpha 1)_{10}$. Como na base 10 os múltiplos positivos de 12 possuem como dígito menos significativo um número do conjunto $\{4, 6, 8, 0, 2\}$ e 1 não está neste conjunto, conclui-se que n não é divisível por 12.
Doutro modo: a condição $(*)$ é satisfeita se existir inteiro um i tal que

$$1 + 10\,\alpha + 28 = 12\,i \Leftrightarrow 10\,\alpha - 12\,i = -29$$

Esta equação diofantina não tem solução visto que $mdc(10, 12) = 2$ e $2 \nmid 29$. Por conseguinte n não é divísível por 12, qualquer que seja o dígito $\alpha \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.