2^o teste de Matemática Experimental

12 de Dezembro de 2006

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1^o ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Resolução

1 a) Falso. Pois $\dfrac{23}{7} = [3; 3, 2]$, pelo que o terceiro elemento do desenvolvimento é o número 2. **[1.5]**

1 b) A afirmação é verdadeira. Como $301 = 7 \times 43$ não é quadrado perfeito, o número considerado é uma irracionalidade quadrática, logo exprime-se como fracção contínua infinita e periódica. **[1.5]**

2) Como $\pi \simeq [3; 7, 15, 1]$, os respectivos convergentes são: **[2.0]**

$$\begin{aligned} c_0 &= [3] = 3 \\ c_1 &= 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \\ c_2 &= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = 3 + \frac{15}{106} = \frac{333}{106} \end{aligned}$$

Atendendo à "lei da melhor aproximação por convergentes", sabemos que

$$|\pi - \frac{333}{106}| < \frac{1}{106^2} < \frac{1}{10000} = 10^{-4}$$

3 a) Prove-se que se o par (X, Y) é solução da equação, então existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $X = -b/d\, j$ e $Y = a/d\, j$. A equação, equivalente à dada, $\frac{a}{d}\, X + \frac{b}{d}\, Y = 0$ é da forma $m\, X + n\, Y = 0$, com $mdc(m, n) = 1$. Logo, $X = -\dfrac{n}{m}\, Y$. Assim, $X \in \mathbb{Z}$ se e só se existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $Y = m\, j = \dfrac{a}{d}\, j$. Donde, $X = -\dfrac{b}{a}\, Y = -\dfrac{b}{d}\, j$. **[2.5]**

Reciprocamente, qualquer que seja $j \in \mathbb{Z}$, atendendo a que $a\, X + b\, Y = -\dfrac{a\, b}{d}\, j + \dfrac{a\, b}{d}\, j = 0$, isto é, o par (X, Y) é solução da equação dada.

3 b) **[2.0]**

A solução geral da equação diofantina $27\,y + 301\,x = 4$ é

$$\begin{cases} y_k = 4 \times (-78) - 301\,k, & k \in \mathbb{Z} \\ x_k = 4 \times 7 + 27\,k \end{cases}$$

Assim,o vector diferença entre pontos adjacentes da recta considerada é constante: $(y_{k+1} - y_k, x_{k+1} - x_k) = (-301, 27)$. Logo, a distância, d, entre pontos adjacentes é

$$d = \sqrt{301^2 + 27^2} > 301 > 300$$

4 a) Como $\mathbb{Z}_{31}$ é constituído por 31 classes de resto, há 30 escolhas possíveis para a entrada a, e 31 escolhas para a entrada b. O grupo é, portanto, constituído por $30 \times 31 = 930$ elementos. **[1.5]**

4 b) Pretende-se determinar a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, com $a \neq 0$, tal que **[2.5]**

$$\begin{bmatrix} 4 & 27 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

É necessário resolver as seguintes equações em $\mathbb{Z}_{31}$:

$$4\,a = 1 \quad \text{e} \quad 4\,b + 27 = 0$$

isto é,

$$4\,a \equiv 1 \pmod{31} \quad \text{e} \quad 4\,b \equiv -27 \equiv 4 \pmod{31}$$

Para o efeito, calcule-se a classe inversa de 4. Como

$$\begin{aligned} 31 &= 4 \times 7 + 3 \\ 4 &= 3 \times 1 + 1 \end{aligned}$$

resulta que $1 = 4 - 3 = 4 - (31 - 4 \times 7) = 8 \times 4 - 31$, ou seja,

$$\bar{1} = \bar{8} \times \bar{4}, \quad \text{donde} \quad \bar{4}^{-1} = \bar{8}$$

Assim,

$$a \equiv 8 \pmod{31} \quad \text{e} \quad b \equiv 32 \equiv 1 \pmod{31}$$

Por conseguinte,

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 c) **[2.0]**

$$Inverse[\{\{4,27\},\{0,1\}\}, Modulus -> 31]$$

5 a) Como $x = 10143215a = 10^8 + 10^6 + 4\times 10^5 + 3\times 10^4 + 2\times 10^3 + 1\times 10^2 + 5\times 10 + a$, e atendendo a que, módulo 7, se verificam as seguintes congruências: **[2.5]**

$$10 \equiv 3,\ 10^2 \equiv 2,\ 10^3 \equiv 6,\ 10^4 \equiv 4,\ 10^5 \equiv 5,\ 10^6 \equiv 1,\ 10^7 \equiv 3,\ 10^8 \equiv 2,$$

resulta,

$$x \equiv 2 + 1 + 20 + 12 + 12 + 2 + 15 + a \equiv 64 + a \equiv 1 + a \pmod 7$$

Então, $7 \mid x$ se e só se existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $1 + a = 7\,j$. Passando a classes de equivalência, obtém-se: $\bar{1} + \bar{a} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a} = \overline{-1} = \bar{6}$. Ou seja, $a = 6 + 7\,k$, $k \in \mathbb{Z}$. Finalmente, para que $0 \le a \le 9$, o inteiro k deverá satisfazer a desigualdade $-\frac{6}{7} \le k \le \frac{3}{7}$, isto é, $k = 0$. Assim, $a = 6$ é o único dígito possível para que x seja divisível por 7.

5 b) A lista *restos* a seguir contém os restos r da divisão de cada número da forma x pelo número 7: **[2.0]**

$$\begin{gathered} restos = Map[\{\#, \\ Mod[FromDigits[\{1,0,1,4,3,2,1,5,\#\},10],7]\}\&, \\ Range[0,9]] \end{gathered}$$

A lista anterior é constituída por elementos da forma $\{a, r\}$, onde $a \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. A lista *casosfavoraveis* contém os elementos da lista *restos* para os quais $r = 0$:

$$casosfavoraveis = Cases[restos, \{a\_, 0\}]$$

A lista dos valores possíveis do dígito a de modo que x seja divisível por 7 obtém-se da lista *casosfavoraveis* escolhendo nesta o primeiro elemento de cada um dos seus pares $\{a, 0\}$:

$$Map[First, casosfavoraveis]$$

Atendendo à alínea 5 a) deve obter-se a lista: $\{6\}$.