1^o teste de Matemática Experimental

14 de Novembro de 2006

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1^o ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Resolução

1 a) O número de combinações $x = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}$ é um número inteiro. **[2.0]**

$$x = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \frac{k!}{(k-m)!\,m!} = \frac{k \times (k-1) \times \ldots \times (k-m+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times m}$$

Assim, o denominador da última expressão (produto dos primeiros m naturais) divide o numerador (produto de m inteiros consecutivos). De igual modo, sendo N o maior número do produto de n inteiros consecutivos, tem-se:

$$y = \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} = \frac{N \times (N-1) \times \ldots \times (N-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n}$$

daqui resultando conclusão análoga à obtida para o número x.

1 b) O comando $IntegerQ$ aplicado à expressão **[1.5]**

$$z = \frac{100 \times 101 \times \ldots \times 200}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 77}$$

produz o resultado $True$. Com efeito, pelo resultado da alínea 1 a), o produto dos 77 inteiros consecutivos $100 \times 101 \times \ldots \times 176$ (que é factor do numerador da expressão z), é divisível pelo denominador da mesma expressão.

2 a) Seja $x = n + 1 = 2^{78}$. O número, k, de dígitos decimais de x é $k = \lfloor \frac{log_2 2^{78}}{log_2 10} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{78}{log_2 10} \rfloor + 1$. Como $3.3 < log_2 10 < 3.4$, resulta que $\frac{78}{3.4} = 22.9 \cdots < \frac{78}{log_2 10}$, donde $k \geq 22+1 = 23$. Por conseguinte, $n = x-1$, que não é potência do número 10, possui pelo menos 23 dígitos decimais. **[1.5]**

2 b) $n = 2^{78} - 1 = (2^{39})^2 - 1 = (2^{39} - 1)\,(2^{39} + 1)$. Logo n é composto. **[1.0]**

3) A proposição é verdadeira. Seja $d \geq 1$ divisor comum de n e p_k. Como **[2.0]**

$n = p_k \times q$ (com q igual ao produto dos restantes primos em J), e $d \mid n$, bem como $d \mid p_k$, então $d \mid 1 = n - p_k \times q$. Como por hipótese, $d \geq 1$, necessariamente $d = 1$. Ou seja, n e p_k são primos relativos.

4 a) **[1.5]**

$$mersenneQ[p\_?PrimeQ] := PrimeQ[2^p - 1]$$

4b) **[1.5]**

$$listaPrimosMersenne = Module[\{i, p, pm, res = \{\}\},$$
$$i = 1; \text{ (* índice do } i\text{- ésimo primo a testar *)}$$
$$While[p = Prime[i];$$
$$pm = 2^p - 1; \text{ (* número de Mersenne *)}$$
$$10^5 \leq pm \leq 10^6, \text{ (* restrição ao intervalo } [10^5, 10^6] \text{ *)}$$
$$If[mersenneQ[p], AppendTo[res, pm]];$$
$$i++];$$
$$res$$
$$]$$

(O resultado é uma lista vazia).

4 c) Como $6540 = 109 \times 60$, e o número 109 é primo (já que não é divisível por nenhum dos números primos $2, 3, 5$ e 7), resulta a seguinte decomposição do numero dado em factores primos: **[1.5]**

$$n = 6540 = 109 \times 2^2 \times 3 \times 5$$

Assim, o número de divisores de n é: $2 \times 3 \times 2 \times 2 = 24$, pelo que a afirmação é falsa.

4 d) **[1.5]**

$$Length[Divisors[6540]]$$

A instrução $Divisors[650]$ dá uma lista dos divisores positivos do número natural 650, e $Length$ dá o número de elementos dessa lista.

5 a) **[2.5]**

Input : $n\,(n\ ,\ n \geq 4,\ n$ par)
$i \leftarrow 1$ $(*\ i$ é o índice do primo $a = Prime[i]$ a testar$*)$
$(*$ o primo a deverá ser menor do que n : $*)$
$While\ a \leftarrow Prime[i]; a < n\ \ do$:
$b = n - a$ $(*$ caso b seja primo $\{a, b\}$ é um par satisfazendo a conjectura : $*)$

Se b primo, então sair com o par $\{a, b\}$ e terminar,
caso contrário incrementar i;
od.

5 b) **[2.0]**

$Goldbach[n\_Integer\,/;\, n \geq 44\,\texttt{\&\&}\, EvenQ[n]] := Module[\{i = 1, a, b\},$
$While[a = Prime[i];$
$a < n,$
$b = n - a;$
$If[PrimeQ[b], Break[\{a, b\}], i++]$
$]$
$]$

5 c) **[1.5]**

$nmin = 10^5; nmax = nmin + 10;$
$Table[\{n, Goldbach[n]\}, \{n, nmin, nmax, 2\}]//TableForm$