1º teste de Matemática Experimental

20 de Novembro de 2007

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

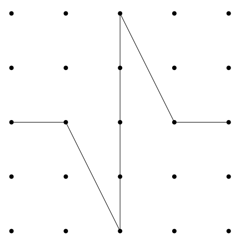
1º ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Resolução

1 a) À lista *data* são atribuidos os pares ordenados (x, y), onde x e y são inteiros ordenados do menor para o maior, satisfazendo a condição $-2 \leq x, y \leq 2$. O resultado não é mostrado. **[1.0]**
À lista $data1$ são atribuidos os pares da lista *data* cujas coordenadas satisfaçam as condições $x^2 + y^2 = 1$ ou $x^2 + y^2 = 4$. O resultado consiste na lista

$$\{\{-2, 0\}, \{-1, 0\}, \{0, -2\}, \{0, -1\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 0\}, \{2, 0\}\}$$

1 b) À variável $gr1$ é atribuido um objecto gráfico contendo os pontos da lista *data*, e à variável $gr2$ os pontos da lista $data1$. Uma vez que é utilizada a opção $Joined -> True$, os pontos em causa irão aparecer sucessivamente ligados por um segmento de recta. Os objectos guardados em $gr1$ e $gr2$ não aparecem no ecrã porque as respectivas instruções terminam com ";". **[1.5]**
A instrução *Show* mostra os dois objectos gráficos referidos sobrepostos, não aparecendo os eixos coordenados devido à inserção da opção $Axes -> False$, obtendo-se um gráfico com o seguinte aspecto:



2 a) $24 = 2^3 \times 3$ possui $4 \times 2 = 8$ divisores positivos. Os números primos possuem apenas 2 divisores positivos. O primeiro número com 8 divisores é necessariamente composto. Ora, os números compostos $4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$ **[1.5]**

e 18 possuem menos que 8 divisores. De igual modo,

$$20 = 2^2 \times 5 \text{ possui } 3 \times 2 = 6 \text{ divisores}$$
$$22 = 2 \times 11 \text{ possui } 2 \times 2 = 4 \text{ divisores}$$

Assim, $m = 24$ é o primeiro número natural que possui $n = 8$ divisores.

2 b) $f[n, \quad n \neq 1$ inteiro] **[2.0]**

$m \leftarrow 1$ (* inicializa a variável que irá conter o primeiro natural cujo número de divisores é n *)

While # (divisores positivos de n) $\neq n$ do

incrementa m de 1 unidade

od;

Output: m.

2 c) Sejam n_1, n_2 e m inteiros positivos. Admitindo que $f(n_1) = f(n_2) = m$, então n_1 e n_2 representam o número de divisores de m. Como este número é único, $n_1 = n_2$, logo f é injectiva. **[1.5]**

2 d) **[1.5]**

$f[n\_Integer\,/;\, n \geq 1] := Module[\{m = 1\},$
$m = 1;$
$While[Length[Divisors[m]]\,!= n,$
$m++];$
$m]$

3 a) O número 37 é primo. Pelo "Pequeno Teorema de Fermat", **[1.5]**

$$2^{37} = 2 \quad (mod\ 37)$$

Assim, existe um inteiro q tal que

$$2^{37} - 2 = 37\,q \quad \Leftrightarrow 2\,(2^{36} - 1) = 37\,q$$

Como $2 \nmid 37$, então $2 \mid q$, isto é, existe um inteiro q' tal que $q = 2 \times q'$. Por conseguinte,

$$2^{36} - 1 = 37\,q'$$

ou seja, o resto da divisão de 2^{36} por 37 é 1.

3 b) **[1.0]**

$$Mod[2^{36}, 37] == 1$$

4 a) **[1.5]**

$$
\begin{array}{l}
Block[\{\$RecursionLimit = Infinity\},\\
x[0] = -7;\\
x[1] = 10;\\
x[n\_Integer\ /;\ n \geq 2] := -4\, x[n-2]\\
]
\end{array}
$$

4 b) O polinómio característico associado à equação às diferenças $x_{n+2} = -4\, x_n,\ (n \geq 0)$, é $z^2 + 4 = 0$, de raízes $z_1 = -2\, i$ e $z_2 = 2\, i$. **[2.5]**
A solução geral é $u_n = c_1\, (-2\, i)^n + c_2\, (2\, i)^n, \quad n = 0, 1, \ldots$. Atendendo aos valores de x_0 e x_1, as constantes c_1, c_2 são solução do sistema

$$
\begin{cases} c_1 + c_2 & = -7 \\ -2\, i\, c_1 + 2\, i\, c_2 & = 10 \end{cases}
$$

Facilmente se obtém

$$
c_1 = \frac{-7 + 5\, i}{2}, \qquad c_2 = \frac{-7 - 5\, i}{2}
$$

Assim,

$$
x_n = \frac{1}{2}[(-7 + 5\, i)\, (-2\, i)^n + (-7 - 5\, i)\, (2\, i)^n] \qquad n = 0, 1, \ldots
$$

Logo,

$$
x_3 = \frac{1}{2}[(-7 + 5\, i) \times 8\, i + (7 + 5\, i) \times 8\, i] = \frac{(-7 + 10\, i + 7)\, 8\, i}{2} = -40
$$

4 c) Como $x_0 = -7$, $x_2 = -4\, x_0$, $x_4 = -4\, x_2 = (-4)^2\, x_0$, resulta por indução que $x_{2\,n} = (-4)^n\, x_0, \quad n = 0, 1, \ldots$. Assim, $|x_{2\,n}| = 4^n\, x_0$ e $\lim_{n\to\infty} |x_{2\,n}| = +\infty$. Por conseguinte, a sucessão $(x_n)_{n\geq 0}$ é não limitada. **[1.5]**

5 a) Se n for o número de dígitos decimais do número b e N o número de divisões inteiras executadas para o cálculo de $mdc(a, b)$, o teorema de Lamé afirma que $N < 5\, n$, isto é, que $N = \mathcal{O}(n)$, ou seja, que o algoritmo de Euclides, no pior caso, possui complexidade linear. No caso presente $N < 5 \times 32 = 160$. **[1.0]**

5 b) **[2.0]**

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_0}{n^k} + \frac{c_1}{n^{k-1}} + \ldots + \frac{c_{k-1}}{n} + c_k = c_k \geq 1
$$

Por definição de limite, existe uma ordem n_0 tal que, por exemplo,

$$0 \leq \left| \frac{a_n}{n^k} - c_k \right| \leq \frac{1}{2}, \qquad \forall n \geq n_0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow n^k\, c_k - \frac{n^k}{2} \leq a_n \leq n^k\, c_k + \frac{n^k}{2} \\ &\Leftrightarrow \ \alpha\, n^k \leq a_n \leq \beta\ n^k \end{aligned}$$

onde $\alpha = \dfrac{2\, c_k - 1}{2} \geq 1/2$ e $\beta = \dfrac{2\, c_k + 1}{2} \geq 3/2$, levando em consideração que $c_k \geq 1$. Por conseguinte, existem constantes positivas α e β, tais que $0 < \alpha\, n^k \leq |a_n| \leq \beta\, n^k$, $\forall n \geq n_0$, isto é, $a_n = \mathcal{O}(n^k)$.