Matemática Experimental

Teste de recuperação (Parte II)– 3 de Janeiro de 2007

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica — Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1^o ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Duração: 1 hora e 30 minutos

Apresente os cálculos, e justifique sucintamente as suas respostas.

1 a) Um certo número fraccionário, z, é representado na base 4 pela seguinte dízima infinita periódica, de período 3: $z = (0.00\overline{123})_4$. Confirme que z é um número racional da forma $\frac{a}{112}$, e obtenha o valor do número natural a. **[2.0]**

1 b) Sendo p um número primo menor do que 31, mostre que o número racional **[2.0]**

$$w = \frac{p}{31}$$

se exprime como uma dízima infinita periódica, de período não inferior a 5.

2) Suponha que pretende enviar uma encomenda pelo correio, cujo porte é de 7.60 euros. Para o efeito apenas estão à venda selos de, respectivamente, 6 e 35 cêntimos. Diga, justificando, se poderá enviar a encomenda. No caso afirmativo, de quantas maneiras poderá escolher os selos? **[2.5]**

3) Considere o polinómio $p(x) = 21\,x^7 + 3\,x^5 + 2\,x^3 - 4\,x + 2$.

3 a) Aplique convenientemente o algoritmo de Horner para obter o valor de $p(-2)$. Justifique. **[1.5]**

3 b) Sabendo que a função *Mathematica* $FoldList[f, x, \{a, b, \ldots\}]$ produz como resultado a lista $\{x, f[x, a], f[f[x, a], b], \ldots\}$, utilize este comando num programa para calcular o valor de $p(-2)$, mediante aplicação do algoritmo de Horner. **[2.5]**

3 c) Se considerar um polinómio real $p(x)$, de variável real, de grau j, com $j \geq 1$, o que pode afirmar a respeito da complexidade temporal do algoritmo de Horner para o cálculo do valor de p num certo ponto $\bar{x}$, em função do grau do polinómio? Justifique. **[1.5]**

4) Considere o número real $\alpha = 15^{1/4}$, e um processo iterativo da forma $x_{k+1} = G(x_k),\ k = 0, 1, \ldots$, de função iteradora

$$G(x) = \frac{4\,x - x^4 + 15}{4}$$

4 a) Escreva uma equação da forma $h(x) = 0$, e determine um intervalo $I = [i, i+1]$, com $i \in \mathbb{Z}$, de modo que α seja o único zero da função h nesse intervalo. Justifique. **[1.5]**

4 b) Uma certa aproximação racional, β, do número $15^{1/4}$ foi calculada através do método da bissecção, aplicado no intervalo I que fixou na alínea anterior. Sabe-se que $\beta = \dfrac{m}{4}$. Calcule o número m e indique um majorante do erro $|\beta - \alpha|$. Justifique. **[2.0]**

4 c) Mostre que α é ponto fixo da função G. No caso de tomar para valor inicial do processo iterativo gerado pela função G, um ponto x_0 muito próximo do ponto fixo referido, é previsível que a sucessão $(x_k)_{k\geq 1}$ convirja para o ponto α? Justifique. **[2.0]**

4 d) Dados os valores iniciais 1.0 e 2.0, pretende-se calcular 5 iterações do método da secante para obter uma lista de aproximações do número α, raiz da equação $h(x) = 0$ referida na alínea 4 a). Escreva código *Mathematica* para esse efeito, inserindo comentários onde lhe parecer apropriado. **[2.5]**
Para inicialização do processo considere a atribuição $X_0 = \{1.0, 2.0\}$. Entre outros, deverá utilizar os comandos $NestList$ e Map.
Formulário: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,(x_n - x_{n-1})/(f(x_n) - f(x_{n-1}))$.