Matemática Experimental

Teste de recuperação (Parte I) – 3 de Janeiro 2007

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica — Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1^o ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Duração: 1 hora e 30 minutos

Apresente os cálculos, e justifique sucintamente as suas respostas.

1) Considere o algoritmo da divisão inteira de números a e b, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \geq 1$.

1 a) Dado um número inteiro negativo a, e um número inteiro positivo b, escreva pseudocódigo, devidamente comentado, para definir uma função cujo resultado seja o quociente inteiro de a por b. Apenas serão admissíveis as operações de adição, subtracção e multiplicação de inteiros. **[2.0]**

1 b) Sem recorrer aos comandos *Floor* e/ou *Mod*, escreva um programa *Mathematica* para definir uma função, caracterizada através de duas cláusulas, para o algoritmo da divisão inteira de a por b nas condições referidas em 1). A primeira cláusula utilizará para dados $a \geq 0$ e $b > 0$, enquanto que para a segunda os dados deverão satisfazer as desigualdades $a < 0$ e $b > 0$. Para testar o seu programa, indique os valores sucessivos que serão atribuídos a cada uma das variáveis que utilizar, ao tomar para dados, respectivamente, os valores $a = 17$ e $b = 5$; $a = -15$ e $b = 5$. **[2.0]**

1 c) Dados os inteiros a e b satisfazendo as desigualdades $0 < a \leq b$, que relação existe entre o número de múltiplos positivos de a não superiores a b, e o quociente de b por a? Justifique. **[1.0]**

2) A respeito da função *NestWhileList*, informa o *Help* do sistema *Mathematica*: " $NestWhileList[f, expr, test]$ generates a list of the results of applying f repeatedly, starting with $expr$, and continuing until applying $test$ to the result no longer yields $True$."

2 a) Aplique *NestWhileList* numa função, de argumento inteiro positivo n, para obter a órbita de Collatz com início em n, admitindo que a conjectura de Collatz é verdadeira. Essa função será invocada através de $Collatz[n]$. **[2.0]**

2 b) Efectue os cálculos necessários, e esboce aproximadamente o gráfico que resulta da execução do seguinte código: **[1.0]**

$$ListPlot[Table[\{k, Length[Collatz[k]]\}, \{k, 5\}], PlotJoined- > True]$$

3) A função *Mathematica* a seguir definida, tem como dados dois pontos A e X, e o vector u (que assumirá pertencendo a $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$). A função *distancia* calcula a distância entre o ponto A e a recta que passa pelo ponto X e tem a direcção do vector u:

$$
\begin{array}{l}
distancia[A\_?VectorQ, X\_?VectorQ, u\_?VectorQ] := \\
Module[\{r, d, tt, t0, \alpha\}, \\
\quad r[t\_] := X + t\, u; \\
\quad d[t\_] := Apply[Plus, (A - r[t])^2]; \\
\quad tt = Flatten[Solve[d'[t] == 0, t]]; \\
\quad t0 = t\, /.\, tt; \\
\quad \alpha = r[t]\, /.\, t \to t0; \\
\quad \sqrt{d[t]\, /.\, t \to t0} \\
\quad\quad]
\end{array}
$$

3 a) Diga, justificando, que significado geométrico atribui à função $d[t]$ e à variável α? **[1.5]**

3 b) Mediante o algoritmo proposto, calcule o valor da distância entre o ponto $A = (1, 0)$ e a recta passando por $X = (1, 1)$, na direcção de $u = (1, 1)$. **[1.5]**

3 c) No caso dos dados serem vectores de $\mathbb{R}^3$, modifique o algoritmo anterior, escrevendo uma nova função, de modo a calcular a distância Δ entre o ponto A e o ponto β (ponto onde a recta considerada intersecta o plano $x_3 = 0$). O resultado deverá ser uma lista contendo as coordenadas de β e a distância Δ. Justifique. **[2.5]**

4) Considere a sucessão

$$
\begin{array}{l}
s_0 = -10^2,\ s_1 = 10^2,\ s_2 = 0 \\
s_{n+3} = \dfrac{3}{4}\, s_{n+2} + \dfrac{1}{4}\, s_{n+1} - \dfrac{3}{16}\, s_n,\ n = 0, 1, \ldots
\end{array}
$$

4 a) Sabe-se que o respectivo polinómio característico é da forma $p(x) = = (x^2 + a\, x + b)\, (x - \frac{1}{2})$. Calcule os coeficientes a e b. Justifique. **[2.5]**

4 b) Diga, justificando, se a sucessão $(s_n)_{n\geq 0}$ é limitada. **[2.5]**

4 c) Que dados forneceria à rotina *LinearSolve*, se a utilizasse para obter uma fórmula fechada da sucessão $(s_n)_{n\geq 0}$? **[1.5]**