# Matemática Experimental

2º Teste – 11 de Dezembro de 2007

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica — Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1º ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Duração: 1 hora e 30 minutos

**Apresente os cálculos, e justifique sucintamente as suas respostas.**

**1(a)** Calcule o valor que resulta da instrução *Mathematica* a seguir: **[1.0]**

$$FromContinuedFraction[\{2, 1, 4, 1, 4\}]$$

**1(b)** Sabendo que o valor que calculou na alínea anterior é o convergente $c_4$ (de ordem quatro) do número $z = \sqrt{8}$, indique um intervalo fechado limitado inferiormente por $c_4$ e superiormente por um número racional $\beta$, de modo que **[1.5]**

$$|z - c_4| < \beta - c_4$$

Justifique.

**1(c)** Prove que $\sqrt{8}$ se exprime como uma fracção contínua periódica, de período 2 e ordem 1. Comece pela igualdade $\sqrt{8} = 2 + \dfrac{1}{x_1}$, onde $x_1 > 1$. **[2.0]**

**1(d)** Atendendo ao resultado que calculou na alínea 1(a), diga qual é a melhor aproximação possível de $\sqrt{8}$ por números racionais da forma $a/b$, onde $mdc(a, b) = 1$ e $5 \leq b \leq 29$. Justifique **[1.5]**

**1(e)** Prove que, dado um número irracional $\delta$ e um inteiro positivo $n$, existe um número racional $a/b$ tal que **[1.5]**

$$|\delta - \frac{a}{b}| < \frac{1}{n}$$

**2)** Dado o inteiro $n \geq 2$, sabe-se que o número $\sqrt{n}$ é racional se e só se $\sqrt{n}$ é inteiro. Aplique este resultado para mostrar que $\sqrt{7}$ é um número irracional. Por que razão se diz que $\sqrt{7}$ é um número algébrico? **[2.0]**

**3(a)** Considere a equação diofantina $27\,\alpha - 450\,\beta = 36$. Executando a instrução *Mathematica* $ExtendedGCD[450, 27]$ obtém-se a lista $l = \{9, \{-1, 17\}\}$. Diga, justificando, se a equação possui solução nos inteiros. No caso positivo, obtenha a solução geral. **[1.0]**

**3(b)** Indique uma classe de congruência $\bar{x}$, tal que $250 < x < 255$, a qual não possua inversa em $\mathbb{Z}_{360}$. Justifique. **[1.5]**

**3(c)** Sabendo que em $\mathbb{Z}_{360}$ a inversa da classe $\overline{-253}$ é $\overline{-37}$, calcule a classe canónica satisfazendo a equação **[1.5]**

$$\overline{107}\,.\,\overline{x} = \overline{4}$$

**3(d)** Escolha números inteiros $a, b, n$, superiores a 3, e escreva a congruência **[1.0]**

$a\,x \equiv b \pmod{n}$ de modo que não exista inverso de $a$ módulo $n$, mas a congruência em causa tenha solução. Justifique. (Não é necessário resolver essa congruência).

**4(a)** Dado um número natural $n$, escreva um programa *Mathematica* (não contendo o comando $IntegerDigits$), capaz de produzir a lista ordenada dos dígitos da representação de $n$ na base 3. Por exemplo, para $n = 2007$ o resultado deverá ser a lista $\{2, 2, 0, 2, 1, 0, 0\}$. **[2.0]**

**4(b)** Efectuando uma determinada sequência de divisões inteiras, mostre que o número racional $2/7$ possui uma representação infinita na base 10. Qual o respectivo período e ordem? Quanto à periodicidade, confirme a sua resposta aplicando um resultado teórico que conheça. **[1.5]**

**4(c)** Para um número natural $n$ estabeleça um critério de divisibilidade de $n$ por 12. É possível existir algum número natural, cuja representação decimal seja da forma $(7\,\alpha\,1)_{10}$, que seja divisível por 12? Justifique. **[2.0]**